2 La trigonométrie

HABILETÉS ACQUISES

- appliquer le théorème de Pythagore
- résoudre des problèmes à l'aide des propriétés de polygones semblables
- résoudre des problèmes qui comportent des rapports

CONCEPTS CLÉS

Dans un triangle rectangle :

- le rapport entre la longueur d'un côté et celle d'un autre côté demeure constant même si le triangle est agrandi ou réduit ;
- le rapport entre la longueur d'un côté et celle d'un autre côté peut servir à déterminer la mesure de l'un des angles aigus ;
- il est possible de déterminer la longueur d'un côté à partir de la longueur d'un autre côté et de la mesure de l'un des angles aigus.

TERMINOLOGIE

un angle d'inclinaison
la tangente
la mesure indirecte
la mesure directe
le sinus
le cosinus
les rapports trigonométriques de base
la trigonométrie
résoudre un triangle
un angle d'élévation
un angle de dépression

L'ÉDIFICE SCIENCE WORLD

Cet édifice a été construit pour l'exposition universelle de 1986 qui a eu lieu à Vancouver, en Colombie-Britannique. Il s'agit d'un dôme géodésique formé de 766 triangles.

2.1 La tangente

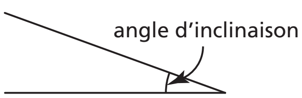
OBJECTIF DE LA LEÇON

Développer la tangente et en établir la relation avec l'angle d'inclinaison d'un segment de droite.

Ce chalet de forestier sur l'île Herschel, au Yukon, a des panneaux solaires sur le toit.

Établis des liens

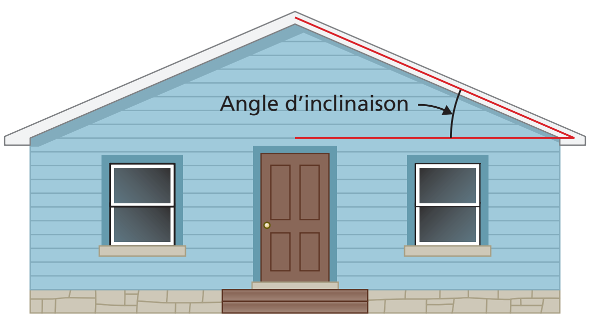
L'**angle d'inclinaison** est l'angle aigu qu'une droite ou un segment de droite forme avec l'horizon.



Des panneaux solaires sur un toit orienté vers le sud sont plus efficaces lorsque l'**angle d'inclinaison,** c'est-à-dire l'angle formé par le toit et l'horizontale, est approximativement égal à la latitude de la maison.

Lorsqu'une architecte dessine les plans d'une maison dont le toit sera muni de panneaux solaires, elle doit déterminer la largeur et la hauteur du toit de manière à optimiser l'efficacité des panneaux.

Qu'arrive-t-il à l'angle d'inclinaison si l'architecte dessine la maison à une échelle différente?



Tu vas explorer la relation entre un angle aigu d'un triangle rectangle et deux côtés de ce triangle.

Développe ta compréhension

Rappelle-toi que deux triangles sont semblables quand un des triangles est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.

Tu as besoin de papier quadrillé, d'une règle et d'un rapporteur.

A. Sur du papier quadrillé, construis un $\triangle ABC$ où $\angle B = 90°$.

B. Construis un triangle rectangle qui est semblable au $\triangle ABC$. Ton triangle doit être différent de celui de ta ou ton camarade.

C. Mesure les côtés et les angles de ton triangle. Inscris les mesures sur ton dessin.

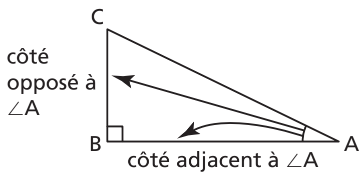
D. Les deux côtés plus courts d'un triangle rectangle sont les cathètes. Avec ta ou ton camarade, détermine, sous la forme d'un nombre décimal, le rapport entre les cathètes du $\triangle ABC$, $\frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}$, puis le rapport correspondant pour chacun des triangles semblables.

E. Que remarques-tu quand tu compares les rapports ?

F. De quoi dépend la valeur de chaque rapport ?

Les cathètes sont les deux côtés qui forment l'angle droit d'un triangle rectancle. Ils sont toujours plus courts que l'hypoténuse.

Les côtés d'un triangle rectangle sont nommés d'après l'un des angles aigus.



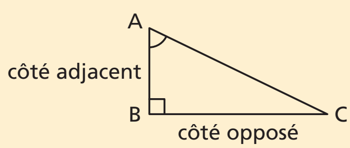
Le rapport
longueur du côté opposé à $\angle A$: longueur du côté adjacent à $\angle A$
dépend uniquement de la mesure de l'angle et non de la taille du triangle.

Ce rapport s'appelle la **tangente** de $\angle A$. On l'écrit « tan $\angle A$ ». La tangente s'écrit généralement comme une fraction.

La tangente

Si $\angle A$ est un angle aigu d'un triangle rectangle, alors :

$$\tan \angle A = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \angle A}{\text{longueur du côté adjacent à } \angle A}$$

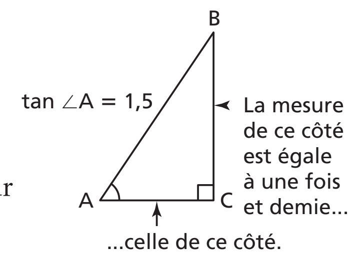


On utilise aussi la notation « tan A » pour désigner la tangente de l'angle A.

> Qu'arrive-t-il à tan ∠A à mesure que ∠A augmente ?

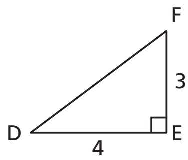
La valeur de la tangente s'exprime habituellement sous la forme d'un nombre décimal qui décrit la relation entre les longueurs des côtés.

Par exemple, si tan ∠A = 1,5, alors la longueur du côté opposé à ∠A sera égale à 1,5 fois la longueur du côté adjacent à ∠A dans tout triangle rectangle semblable ayant cet ∠A.



Exemple 1 Déterminer la tangente d'un angle

Détermine tan ∠D et tan ∠F.

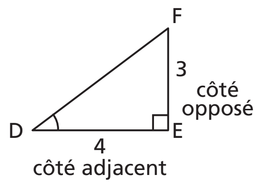


SOLUTION

$$\tan \angle D = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \angle D}{\text{longueur du côté adjacent à } \angle D}$$

$$\tan \angle D = \frac{\overline{EF}}{\overline{DE}}$$

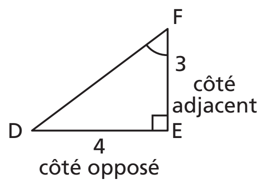
$\overline{EF}$ est opposé à ∠D et $\overline{DE}$ est adjacent à ∠D.



$$\tan \angle D = \frac{3}{4}$$

$$\tan \angle D = 0{,}75$$

$$\tan \angle F = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \angle F}{\text{longueur du côté adjacent à } \angle F}$$



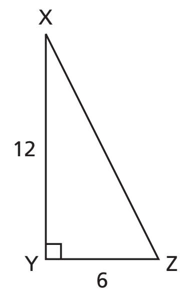
$$\tan \angle F = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

$$\tan \angle F = \frac{4}{3}$$

$$\tan \angle F = 1{,}\overline{3}$$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Détermine tan ∠X et tan ∠Z.



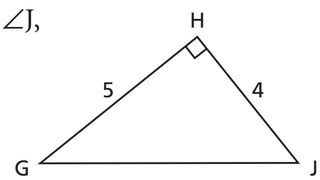
[Réponse : tan ∠X = 0,5 et tan ∠Z = 2]

> Quelle relation y a-t-il entre la valeur de tan ∠D et la valeur de tan ∠F ? Explique pourquoi cette relation est vraie pour les angles aigus de tout triangle rectangle.

Tu peux utiliser une calculatrice scientifique pour déterminer la mesure d'un angle aigu lorsque tu connais la valeur de sa tangente. La fonction réciproque de la tangente ($\tan^{-1}$) de la calculatrice permet d'effectuer ce calcul.

Exemple 2 Déterminer la mesure d'un angle à l'aide de la tangente

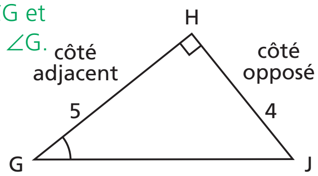
Détermine la mesure de ∠G et celle de ∠J, au dixième de degré près.



SOLUTION

Dans le $\triangle GHJ$:

$\overline{HJ}$ est opposé à $\angle G$ et $\overline{HG}$ est adjacent à $\angle G$.



$$\tan \angle G = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

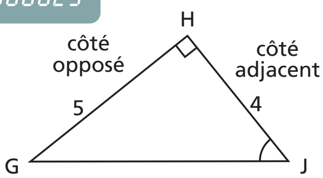
$$\tan \angle G = \frac{4}{5}$$

$$\tan \angle G = 0{,}8$$

$$\angle G \approx 38{,}7°$$

Utilise une calculatrice scientifique.

tan⁻¹(0.8)
38.65980825



$$\tan \angle J = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \angle J = \frac{5}{4}$$

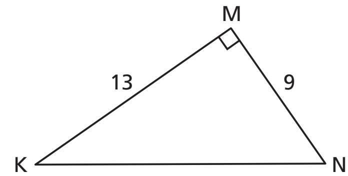
$$\tan \angle J = 1{,}25$$

$$\angle J \approx 51{,}3°$$

tan⁻¹(1.25)
51.34019175

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Détermine la mesure de $\angle K$ et celle de $\angle N$, au dixième de degré près.

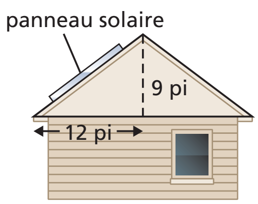


[Réponse : $\angle K \approx 34{,}7°$ et $\angle N \approx 55{,}3°$]

Quelle autre stratégie peux-tu utiliser pour déterminer la mesure de $\angle J$?

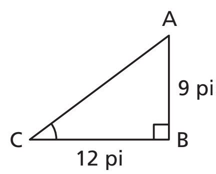
Exemple 3 Déterminer un angle d'inclinaison à l'aide de la tangente

La latitude de Fort Smith, dans les Territoires du Nord-Ouest, est d'environ 60°. Détermine si ce le montage d'un panneau solaire est le plus approprié pour Fort Smith. Explique ta réponse.



SOLUTION

Le meilleur angle d'inclinaison possible du panneau solaire correspond à la latitude, soit 60°. Construis un triangle rectangle pour représenter la coupe transversale du toit et du panneau solaire. $\angle C$ est l'angle d'inclinaison.



Dans le $\triangle ABC$:

$$\tan \angle C = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$\overline{AB}$ est opposé à $\angle C$ et $\overline{BC}$ est adjacent à $\angle C$.

$$\tan \angle C = \frac{9}{12}$$

$$\tan \angle C = 0{,}75$$

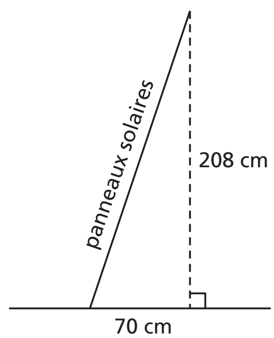
$$\angle C \approx 37°$$

tan⁻¹(0.75)
36.86989765

L'angle d'inclinaison du panneau solaire est d'environ 37°, ce qui n'est pas égal à la latitude de Fort Smith. Par conséquent, le montage présenté n'est pas le plus approprié.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Clyde River, sur l'île de Baffin, au Nunavut, se trouve à environ 70° de latitude. Le schéma suivant présente une vue latérale de quelques panneaux solaires. Détermine si le montage établi pour ces panneaux solaires est le plus approprié pour Clyde River. Explique ta réponse.



[Réponse : L'angle d'inclinaison est d'environ 71°. Le montage est donc approprié pour Clyde River.]

Exemple 4 Résoudre un problème à l'aide du rapport de la tangente

Une échelle de 10 pi est appuyée contre le mur d'un immeuble. Son pied se trouve à 4 pi du mur.

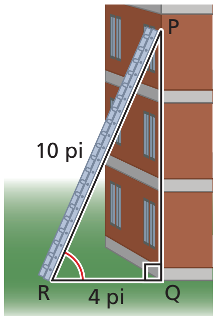
Quel angle l'échelle forme-t-elle avec le sol, au degré près ?

SOLUTION

Trace un schéma.

Nomme les sommets du $\triangle$PQR.

Suppose que le sol est horizontal et que l'immeuble est vertical.



Pour déterminer la mesure de $\angle$R à l'aide de la tangente, il faut connaître la longueur du côté PQ.

Applique le théorème de Pythagore au $\triangle$PQR.

$$\overline{PR}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2$$

Isole l'inconnue.

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 - \overline{QR}^2$$

$$\overline{PQ}^2 = 10^2 - 4^2$$

$$= 84$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{84}$$

Insère le rapport de la tangente dans le $\triangle$PQR.

$$\tan \angle R = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$$

$\overline{PQ}$ est opposé à $\angle$R et $\overline{QR}$ est adjacent à $\angle$R.

$$\tan \angle R = \frac{\sqrt{84}}{4}$$

$$\tan \angle R = 2{,}291\ 3...$$

```
tan⁻¹(Ans)
        66.42182152
```

$$\angle R \approx 66°$$

L'échelle et le sol forment un angle d'environ 66°.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

4. Un câble de soutien est ancré au sol à 5 m de la base d'un poteau de téléphone. Il mesure 19 m de longueur et est fixé au poteau près de son sommet. Quel angle le câble forme-t-il avec le sol, au degré près ?

[Réponse : L'angle est d'environ 75°.]

Suppose que tu utilises $\overline{PQ} \approx 9{,}2$ au lieu de $\overline{PQ} = \sqrt{84}$. Comment cela change-t-il la mesure calculée de $\angle$R ?

Place à la discussion

1. Pourquoi la valeur de la tangente d'un angle donné ne dépend-elle pas du triangle rectangle utilisé pour la calculer ?

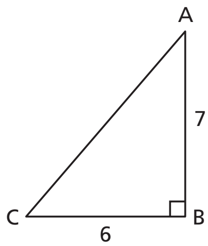
2. Comment la tangente peut-elle servir à déterminer la mesure des angles aigus d'un triangle rectangle si on connaît la longueur de ses cathètes ?

Exercices

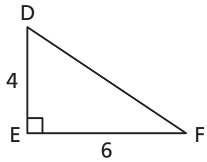
A

3. Indique la tangente des angles aigus de chaque triangle.

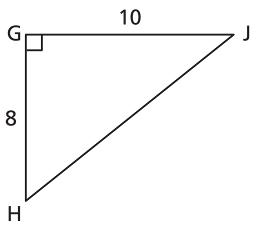
a)



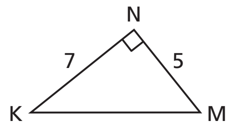
b)



c)



d)



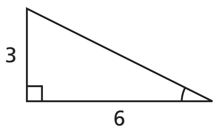
4. Détermine, au degré près, la mesure de $\angle X$ pour chaque valeur de tan $\angle X$.

a) tan $\angle X = 0{,}25$ **b)** tan $\angle X = 1{,}25$

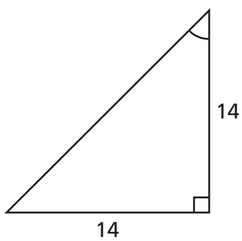
c) tan $\angle X = 2{,}50$ **d)** tan $\angle X = 20$

5. Détermine la mesure de chaque angle indiqué, au degré près.

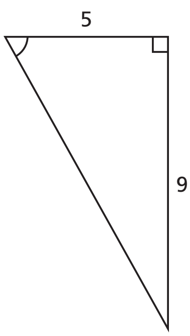
a)



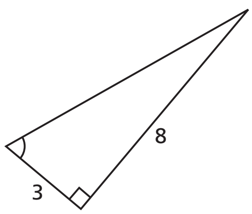
b)



c)



d)



B

6. Sur du papier quadrillé, représente chaque tangente à l'aide d'un triangle rectangle et indique la mesure des cathètes.

a) tan $\angle B = \frac{3}{5}$ **b)** tan $\angle E = \frac{5}{3}$ **c)** tan $\angle F = \frac{1}{4}$

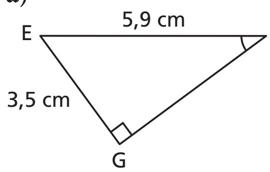
d) tan $\angle G = 4$ **e)** tan $\angle H = 1$ **f)** tan $\angle J = 25$

7. **a)** La valeur de tan 60° est-elle supérieure ou inférieure à 1 ? Comment le sais-tu sans utiliser de calculatrice ?

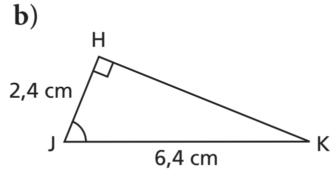
b) La valeur de tan 30° est-elle supérieure ou inférieure à 1 ? Comment le sais-tu sans utiliser de calculatrice ?

8. Détermine la mesure de chaque angle indiqué, au dixième de degré près. Décris ta stratégie.

a)

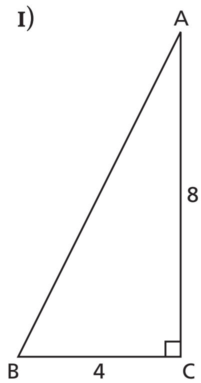


b)

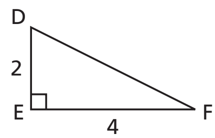


9. **a)** Pourquoi ces triangles sont-ils semblables ?

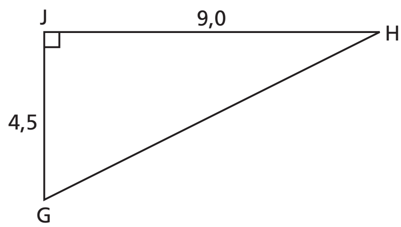
I)



II)



III)

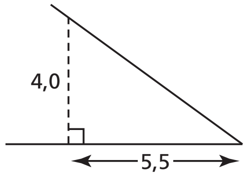


b) Détermine la mesure des angles aigus de chaque triangle en a), au dixième de degré près.

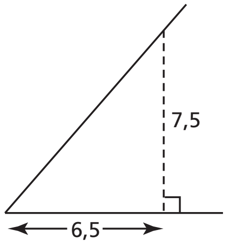
c) Pour répondre en b), as-tu eu besoin de calculer la mesure des 6 angles aigus ? Explique ta réponse.

10. Détermine l'angle d'inclinaison de chaque demi-droite, au dixième de degré près.

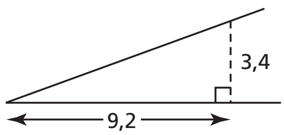
a)



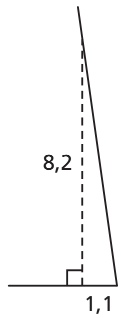
b)



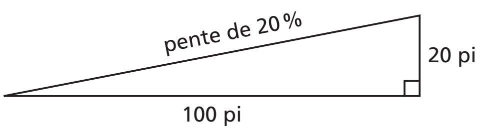
c)



d)



11. La pente ou l'inclinaison d'une route est souvent exprimée sous la forme d'un pourcentage. Si la pente d'une route est de 20 %, l'altitude de la route augmente de 20 pi par 100 pi de distance horizontale parcourue.

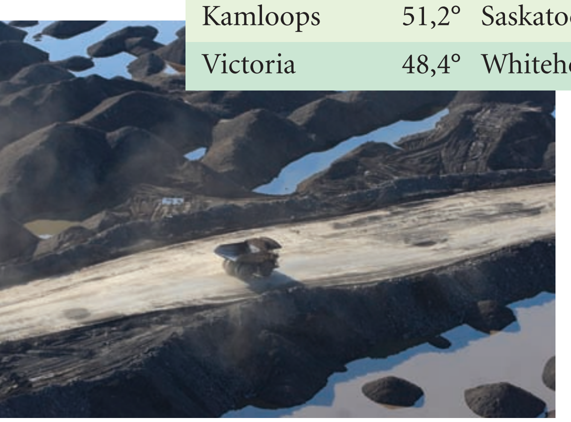


Calcule, au degré près, l'angle d'inclinaison des routes ayant les pentes suivantes.

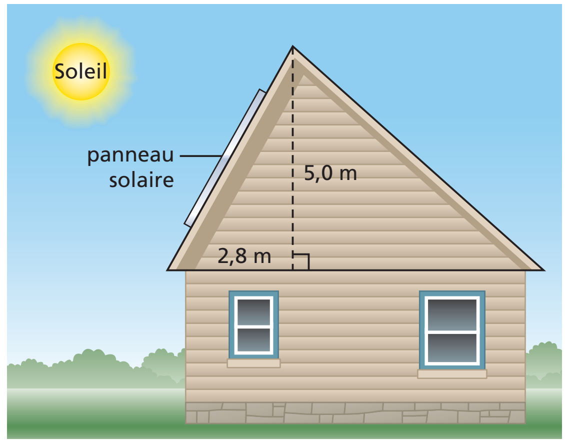
a) 20 % **b)** 25 % **c)** 10 % **d)** 15 %

12. Voici la latitude approximative de huit villes de l'Ouest canadien :

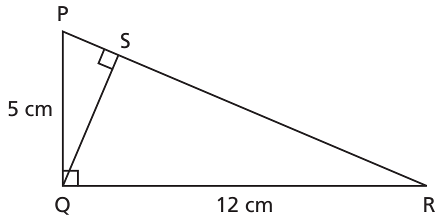
Calgary	51,1°	Edmonton	53,5°
Fort McMurray	56,5°	Inuvik	68,4°
Kamloops	51,2°	Saskatoon	52,2°
Victoria	48,4°	Whitehorse	60,7°



Dans quelle ou quelles villes la pente du toit suivant est-elle à moins de 1° de l'angle recommandé pour des panneaux solaires ? Explique ta réponse.



13. Détermine la mesure des angles aigus de ce schéma, au dixième de degré près.



14. Un ornithologue amateur aperçoit un aigle au sommet d'un arbre de 20 m. Il est étendu sur le sol à 50 m de l'arbre. À quel angle doit-il incliner son appareil photo pour photographier l'aigle ? Indique la réponse au degré près.

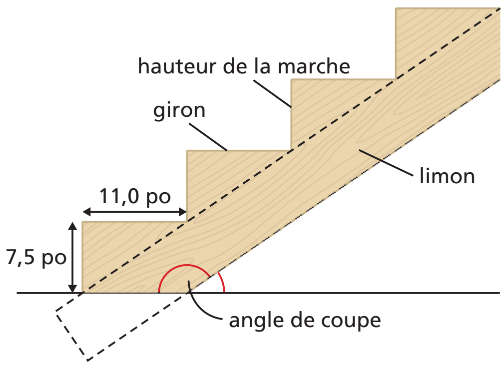
15. Un rectangle mesure 3 cm sur 8 cm. Quels angles une diagonale du rectangle forme-t-elle avec les côtés du rectangle ? Indique leurs mesures au dixième de degré près.

16. Dans un triangle rectangle isocèle, pourquoi la tangente d'un angle aigu est-elle égale à 1 ?

17. Dans un terrain de jeu, le haut d'une glissoire se trouve à 107 cm du sol, et cette glissoire a 250 cm de longueur. Quel angle la glissoire forme-t-elle avec le sol ? Indique la réponse au degré près.

18. Le remonte-pente Pioneer, à Golden, en Colombie-Britannique, a 1 366 m de longueur. Il parcourt une distance verticale de 522 m. Quel est son angle d'inclinaison ? Indique la réponse au degré près.

19. Dans une planche rectangulaire, un charpentier coupe un limon pour soutenir des marches. Chaque marche a une hauteur de 7,5 po et un giron de 11,0 po. À quel angle le charpentier doit-il scier la planche, au degré près ?



20. Par mesure de sûreté, une échelle est placée de façon que la distance entre son pied et le mur ne dépasse pas $\frac{1}{4}$ de sa longueur. Au degré près, quel est le plus grand angle d'inclinaison permis pour cette échelle ?

C

21. Dans le triangle isocèle XYZ, $\overline{XY} = \overline{XZ} = 5{,}9$ cm et $\overline{YZ} = 5{,}0$ cm. Détermine la mesure des angles du triangle, au dixième de degré près.

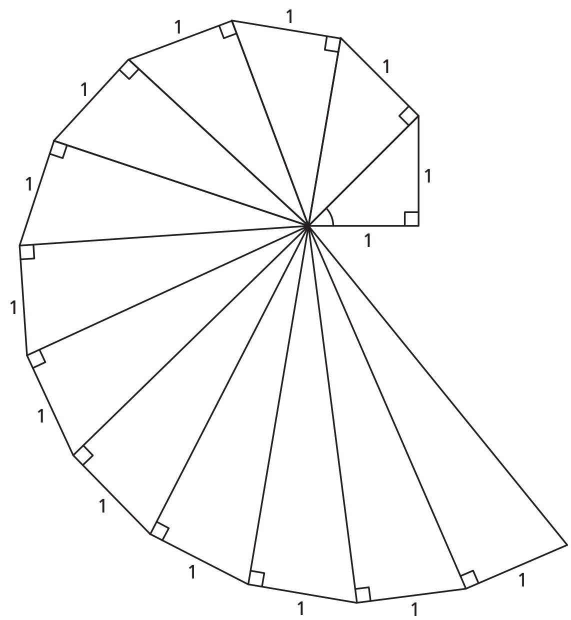
22. Pour la tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle :

a) quelle est la plus petite valeur possible ?

b) quelle est la plus grande valeur possible ?

Explique tes réponses.

23. Pour construire une spirale de Pythagore, il faut tracer des triangles rectangles à partir de l'hypoténuse d'autres triangles rectangles. Pour commencer, dessine un triangle rectangle dont chaque cathète mesure 1 unité de longueur. Sers-toi ensuite de l'hypoténuse de ce triangle comme cathète d'un autre triangle. L'autre cathète de ce deuxième triangle doit avoir 1 unité de longueur. Complète le triangle. Continue ce processus. Tu verras une spirale prendre forme.



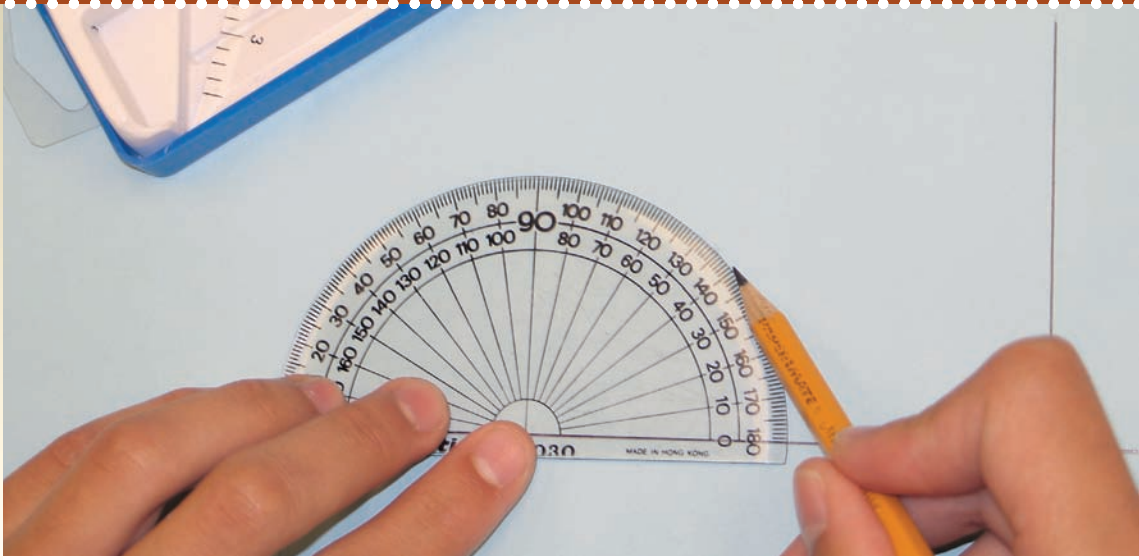
a) Détermine la tangente de l'angle au centre de la spirale dans chacun des 5 premiers triangles.

b) Utilise la régularité en a) pour prédire la tangente de l'angle au centre dans le 100^e^ triangle. Justifie ta réponse.

Réfléchis

Fais un résumé de tes apprentissages sur la tangente et sa relation avec les côtés et les angles d'un triangle rectangle.

2.2 Déterminer des mesures de longueur à l'aide de la tangente

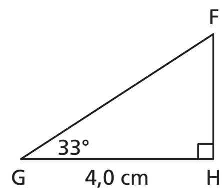


OBJECTIF DE LA LEÇON

Déterminer des longueurs à l'aide de la tangente.

Établis des liens

À la leçon 2.1, tu as utilisé la mesure des deux cathètes d'un triangle rectangle pour calculer la mesure de ses angles aigus. Quand tu connais la longueur d'une cathète d'un triangle rectangle et la mesure d'un de ses angles aigus, tu peux construire ce triangle.



Quelles autres mesures du triangle peux-tu calculer ?

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille avec une ou un camarade.

Dans le $\triangle PQR$, $\angle Q = 90°$, $\angle P = 34{,}5°$ et $\overline{PQ} = 46{,}1$ cm. Détermine la longueur de $\overline{RQ}$ au dixième de centimètre près.

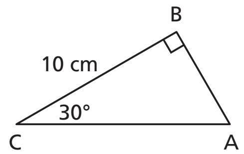
La tangente est très utile pour calculer la longueur de l'une des cathètes d'un triangle rectangle. C'est ce que l'on appelle la **mesure indirecte.**

Dans un triangle rectangle, on peut utiliser la tangente, $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$, pour écrire une équation. Quand la mesure d'un angle aigu et la longueur d'un côté de l'angle droit sont connues, on peut résoudre l'équation pour déterminer la longueur de l'autre côté.

La **mesure directe** consiste à déterminer la longueur d'un côté ou la mesure d'un angle d'un polygone à l'aide d'un instrument de mesure. La **mesure indirecte** consiste à déterminer ces mesures à l'aide d'un raisonnement mathématique.

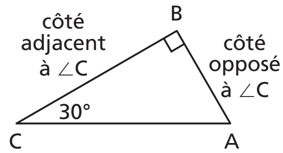
Exemple 1 Déterminer la longueur du côté opposé à un angle donné à l'aide de la tangente

Détermine la longueur de $\overline{AB}$, au dixième de centimètre près.



SOLUTION

Dans le $\triangle ABC$, $\overline{AB}$ est le côté opposé à $\angle C$ et $\overline{BC}$ est le côté adjacent à $\angle C$.



À l'aide de la tangente, écris une équation.

$$\tan \angle C = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \angle C = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\tan 30° = \frac{\overline{AB}}{10}$$

Résous l'équation.

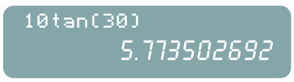
$$10 \times \tan 30° = \frac{\overline{AB}}{10} \times 10$$

Multiplie les deux membres par 10.

Écris 10 × tan 30° comme ceci : 10 tan 30°. S'il n'y a pas de signe d'opération, la multiplication est sous-entendue.

$$10 \tan 30° = \overline{AB}$$

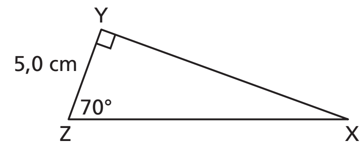
$$\overline{AB} = 5{,}773\ 5...$$



Le côté AB mesure environ 5,8 cm.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Détermine la longueur de $\overline{XY}$, au dixième de centimètre près.

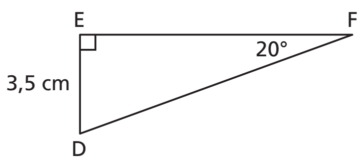


[Réponse : $\overline{XY} \approx 13{,}7$ cm]

Comment peux-tu déterminer la longueur de l'hypoténuse du $\triangle ABC$?

Exemple 2 Déterminer la longueur du côté adjacent à un angle donné à l'aide de la tangente

Détermine la longueur de $\overline{EF}$, au dixième de centimètre près.



SOLUTIONS

Méthode n° 1

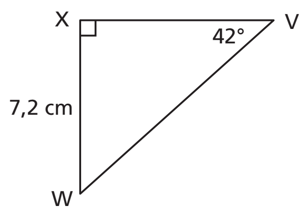
Dans le $\triangle DEF$, $\overline{DE}$ est le côté opposé à $\angle F$ et $\overline{EF}$ est le côté adjacent à $\angle F$.

$$\tan \angle F = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Détermine la longueur de $\overline{VX}$, au dixième de centimètre près.



[Réponse : $\overline{VX} \approx 8{,}0$ cm]

$$\tan \angle F = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

$$\tan 20° = \frac{3{,}5}{\overline{EF}}$$

Résous l'équation.

Multiplie les deux membres de l'équation par $\overline{EF}$.

$$\overline{EF} \tan 20° = \overline{EF}\left(\frac{3{,}5}{\overline{EF}}\right)$$

$$\overline{EF} \tan 20° = 3{,}5$$

Divise les deux membres de l'équation par tan 20°.

$$\frac{\overline{EF} \tan 20°}{\tan 20°} = \frac{3{,}5}{\tan 20°}$$

```
3.5/tan(20)
9.616170968
```

$$\overline{EF} = \frac{3{,}5}{\tan 20°}$$

$$\overline{EF} = 9{,}616\ 1...$$

Alors, le côté EF mesure environ 9,6 cm.

Quel avantage y a-t-il à isoler $\overline{EF}$ avant de calculer tan 20° ?

Méthode n° 2

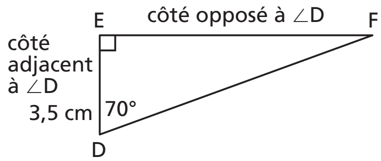
Dans le $\triangle$DEF :

$$\angle D + \angle F = 90°$$

$$\angle D + 20° = 90°$$

$$\angle D = 90° - 20°$$

$$\angle D = 70°$$



$\overline{EF}$ est le côté opposé à $\angle$D et $\overline{DE}$ est le côté adjacent à $\angle$D.

$$\tan \angle D = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \angle D = \frac{\overline{EF}}{\overline{DE}}$$

$$\tan 70° = \frac{\overline{EF}}{3{,}5}$$

Résous l'équation.

Multiplie les deux membres de l'équation par 3,5.

$$3{,}5 \times \tan 70° = \frac{(\overline{EF})\,(3{,}5)}{3{,}5}$$

$$3{,}5 \tan 70° = \overline{EF}$$

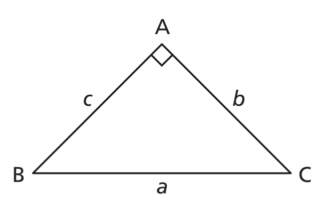
$$\overline{EF} = 9{,}616\ 1...$$

Le côté EF mesure environ 9,6 cm.

Quelle méthode trouves-tu la plus facile pour déterminer la longueur de $\overline{EF}$? Pourquoi ?

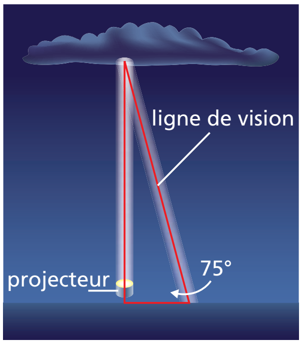
Comment peux-tu déterminer la longueur de $\overline{DF}$?

Il est souvent pratique d'utiliser la lettre minuscule correspondante pour nommer le côté opposé à un sommet d'un triangle.



Exemple 3 Résoudre un problème de mesure indirecte à l'aide de la tangente

Un projecteur éclaire un nuage à la verticale. À une distance horizontale de 250 m du projecteur, l'angle formé par le sol et la ligne de vision vers le nuage est de 75°. Détermine la hauteur du nuage, au mètre près.

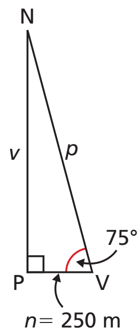


SOLUTION

Trace un schéma annoté pour représenter les données du problème.

Suppose que le sol est horizontal.

Dans le △NVP, le côté PN est opposé à ∠V et le côté PV est adjacent à ∠V.



$$\tan \angle V = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \angle V = \frac{v}{n}$$

$$\tan 75° = \frac{v}{250}$$

Résous l'équation.

Multiplie les deux membres de l'équation par 250.

$$250 \tan 75° = \left(\frac{v}{250}\right) 250$$

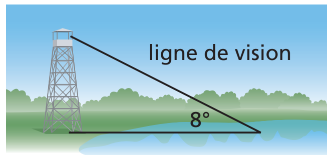
$$250 \tan 75° = v$$

$$v = 933{,}012\,7...$$

Le nuage se trouve à environ 933 m de hauteur.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. À une distance horizontale de 200 m du pied d'une tour d'observation, l'angle formé par le sol et la ligne de vision vers le sommet de la tour est de 8°. Quelle est la hauteur de la tour, au mètre près ? Le schéma *n*'est *pas* à l'échelle.



[Réponse : 28 m]

Pourquoi peux-tu construire un triangle rectangle pour représenter le problème ?

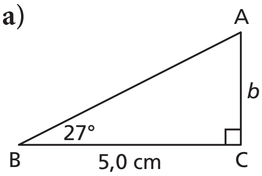
Place à la discussion

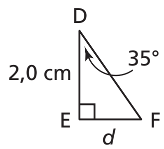
1. Comment peux-tu déterminer la longueur d'une cathète d'un triangle rectangle à l'aide de la tangente ?
2. Suppose que tu connais la longueur des cathètes d'un triangle rectangle, ou que tu peux la calculer. Pourquoi peux-tu toujours déterminer la longueur de l'hypoténuse ?

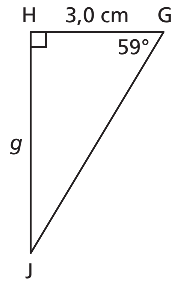
Exercices

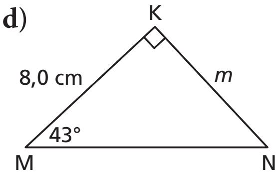
A

3. Détermine la longueur de chaque côté indiqué, au dixième de centimètre près.

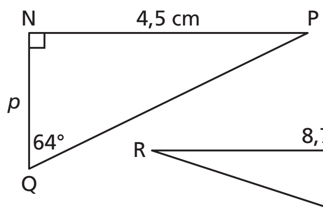
a)


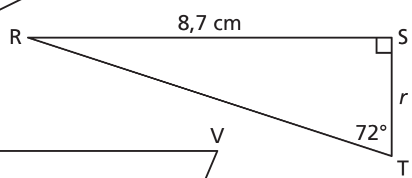
b)


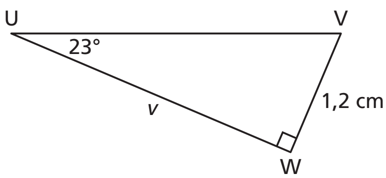
c)


d)


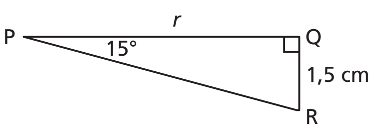
4. Détermine la longueur de chaque côté indiqué, au dixième de centimètre près.

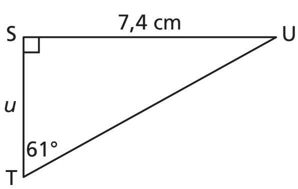
a)


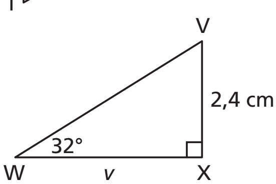
b)


c)


5. Détermine la longueur de chaque côté indiqué, au dixième de centimètre près.

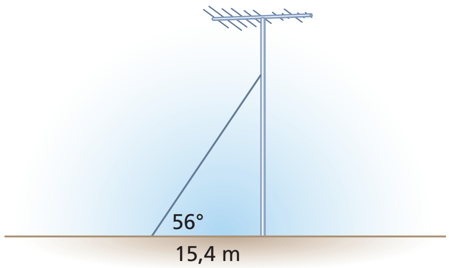
a)


b)


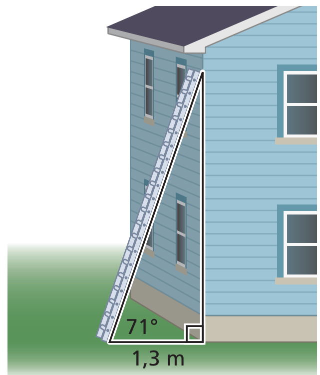
c)


B

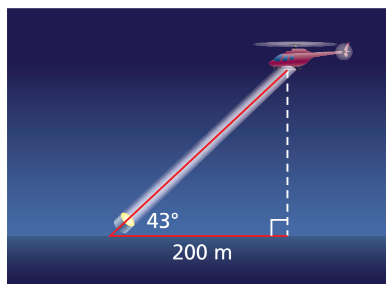
6. Un câble d'ancrage soutient une tour. Le câble et le sol forment un angle de 56°. Une extrémité du câble est fixée au sol à 15,4 m de la base de la tour. À quelle hauteur le câble est-il fixé sur la tour, au dixième de centimètre près ?



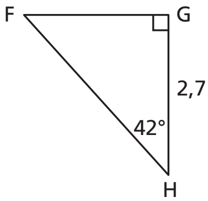
7. Une échelle est appuyée contre un mur et son pied est posé sur le sol à 1,3 m du mur. L'échelle et le sol forment un angle de 71°. À quelle hauteur l'échelle touche-t-elle le mur, au dixième de centimètre près ?

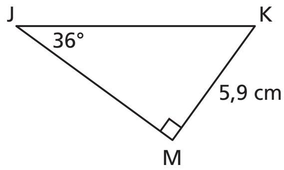


8. Un hélicoptère descend à la verticale. Au sol, à 200 m du point d'atterrissage, un projecteur éclaire l'hélicoptère. Son faisceau lumineux forme un angle de 43° avec le sol. À quelle hauteur se trouve l'hélicoptère à ce moment-là, au mètre près ?

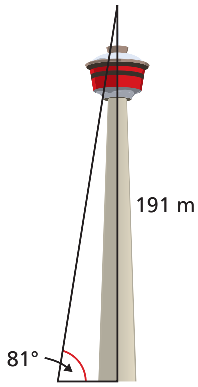


9. Détermine la longueur de l'hypoténuse de chaque triangle rectangle, au dixième de centimètre près. Décris ta stratégie.

a) 

b) 

10. Claire sait que la tour de Calgary mesure 191 m de hauteur. D'un certain point, la ligne de vision de Claire jusqu'au sommet de la tour forme un angle de 81° avec le sol. Environ à quelle distance de la tour Claire se trouve-t-elle, au mètre près ? Pourquoi cette distance est-elle approximative?



11. Dans un rectangle, un long côté et une diagonale forment un angle de 34°. Chaque côté court du rectangle mesure 2,3 cm.

a) Esquisse ce rectangle et indique ses mesures.

b) Quelle est la longueur du rectangle, au dixième de centimètre près ?

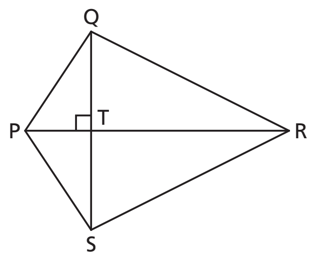
12. Dans le $\triangle PQR$, $\angle R = 90°$, $\angle P = 58°$ et $\overline{PR} = 7{,}1$ cm. Détermine l'aire du $\triangle PQR$, au dixième de centimètre carré près. Décris la stratégie que tu as utilisée.

13. Le Palais législatif du Manitoba mesure environ 77 m du sol jusqu'au sommet de la statue appelée le Golden Boy. Liam est couché sur le sol, près de l'édifice. Sa ligne de vision jusqu'au sommet forme un angle de 52° avec le sol. À environ quelle distance Liam se trouve-t-il du point au sol à la vertical de la statue ? Comment le sais-tu ?

14. Un gros ballon gonflé à l'hélium est ancré sur le toit d'un magasin. Lorsque Janelle se trouve à 100 m du magasin, sa ligne de vision jusqu'au ballon forme un angle de 30° avec le sol. À quelle hauteur approximative se trouve le ballon ? Quelles suppositions as-tu faites ?

C

15. Dans le cerf-volant PQRS, la plus courte diagonale, $\overline{QS}$, mesure 6,0 cm, $\angle QRT$ mesure 26,5° et $\angle QPT$ mesure 56,3°. Détermine la mesure de tous les angles et la longueur des côtés du cerf-volant, au dixième près.



16. Dans un plan cartésien :

a) trace une droite qui passe par les points A(4, 5) et B(−4, −5). Détermine la mesure de l'angle aigu formé par la droite AB et l'axe des *y*.

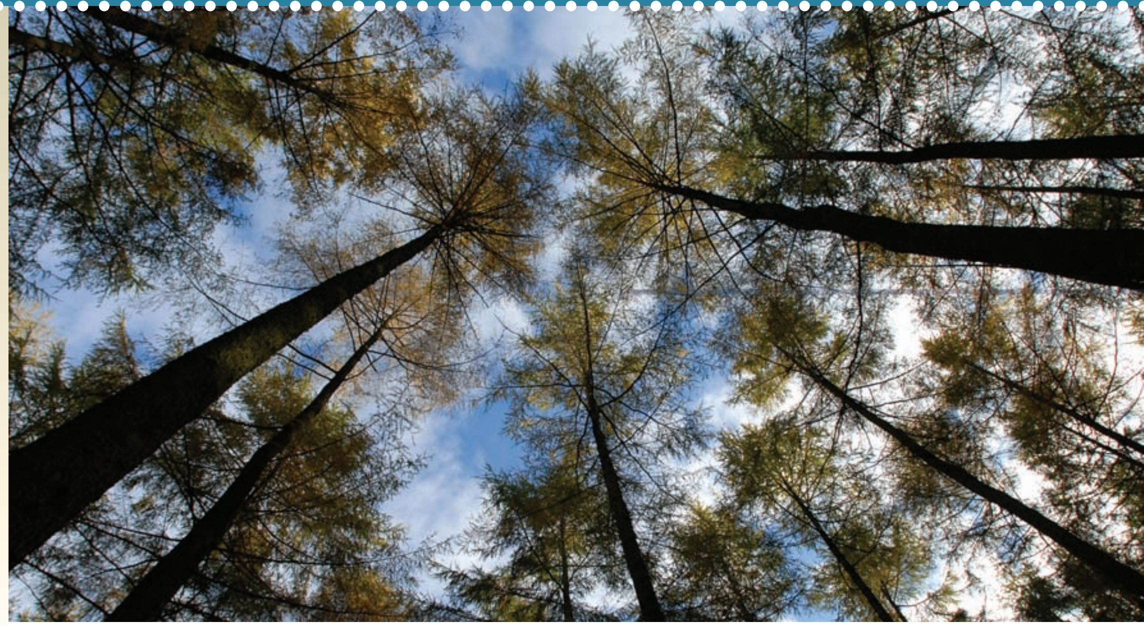
b) trace une droite qui passe par les points C(1, 4) et D(4, −2). Détermine la mesure de l'angle aigu formé par la droite CD et l'axe des *x*.

Réfléchis

Fais un résumé de tes apprentissages sur l'utilisation de la tangente pour déterminer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle.

LABORATOIRE

2.3 Mesurer une hauteur de façon indirecte



OBJECTIF DE LA LEÇON

Déterminer une hauteur qui ne peut pas être mesurée directement.

Établis des liens

En foresterie, un *clinomètre* sert à mesurer l'angle formé par une droite horizontale et la ligne de vision jusqu'au sommet d'un arbre. On mesure la distance qui sépare le clinomètre du pied de l'arbre. Comment peut-on ensuite utiliser la tangente pour calculer la hauteur de l'arbre ?

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

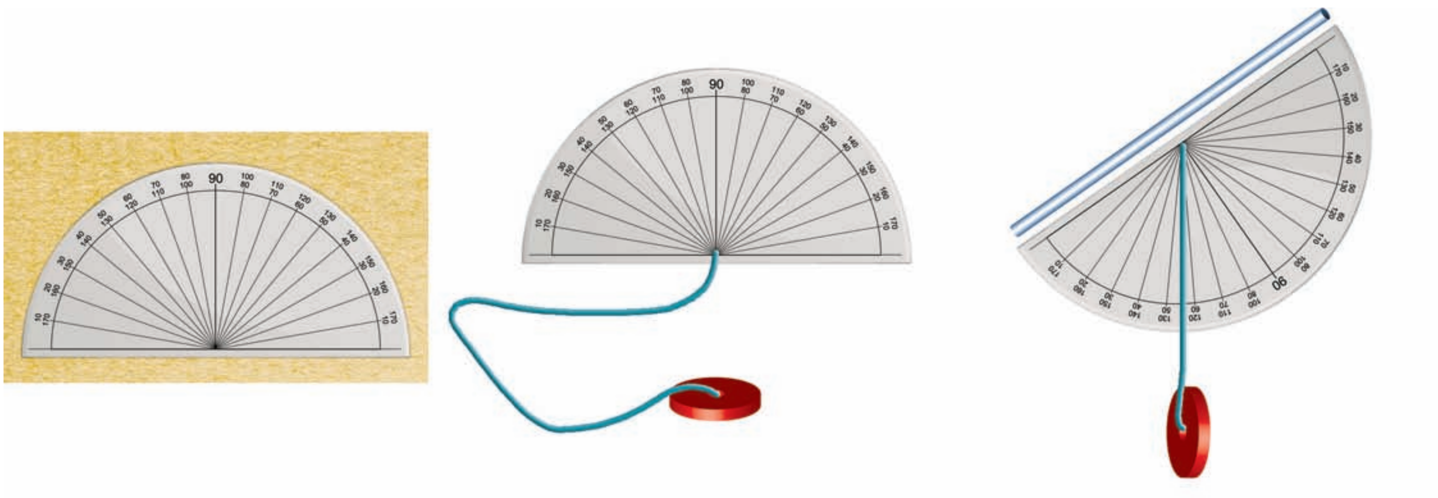
Travaille avec une ou un camarade. Tu as besoin du matériel suivant :

- une copie papier agrandie d'un rapporteur de 180°,
- des ciseaux,
- un mètre à ruban ou deux mètres rigides,
- un morceau de carton épais, assez grand pour y fixer le rapporteur en papier,
- une paille,
- de la colle,
- du ruban adhésif,
- du fil et une aiguille,
- une petite rondelle de métal, ou une masse,
- du papier quadrillé.

A. Fabrique un clinomètre à paille.

- Avec de la colle ou du ruban adhésif, fixe le rapporteur en papier sur le carton puis découpe-le avec soin.
- À l'aide de l'aiguille, fais passer le fil à travers le carton au centre de la ligne de foi du rapporteur. Fixe le fil au dos du carton avec du ruban adhésif. Attache la masse à l'autre extrémité du fil.
- Fixe la paille le long de la ligne de foi du rapporteur; tu regarderas dans ce tube.

La ligne de foi est la ligne horizontale qui marque la base du rapporteur.



B. Avec ta ou ton camarade, choisis un objet dont il est impossible de mesurer la hauteur directement, comme un mât de drapeau, un totem, un arbre ou un édifice.

C. Tiens-toi debout près de cet objet. Ta ou ton camarade mesure et note la distance entre toi et l'objet.

D. Tiens le clinomètre comme dans l'illustration, avec la masse qui pend.

Quelle relation y a-t-il entre l'angle aigu formé par le fil et la paille, d'une part, et l'angle d'inclinaison de la paille, d'autre part ?

E. Vise le sommet de l'objet en regardant dans la paille. Ta ou ton camarade lit et note l'angle aigu indiqué par le fil sur le rapporteur.

F. Ta ou ton camarade mesure et note la hauteur de ton œil par rapport au sol.

G. Dessine un schéma dans lequel un segment de droite vertical représente l'objet à mesurer. Indique :

- la distance entre toi et l'objet,
- la distance verticale entre le sol et tes yeux,
- l'angle d'inclinaison de la paille.

H. Inverse les rôles avec ta ou ton camarade et refais les points B à G.

Quelle autre stratégie peux-tu utiliser pour déterminer la hauteur de l'objet ?

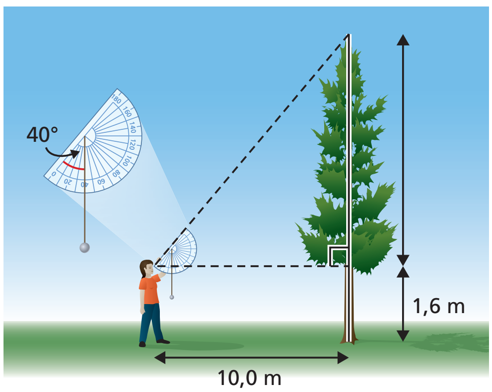
I. À l'aide de tes mesures et de la tangente, calcule la hauteur de l'objet.

J. Compare tes résultats avec ceux de ta ou de ton camarade. La hauteur des yeux influe-t-elle sur les mesures ? Influe-t-elle sur le résultat final ? Explique ta réponse.

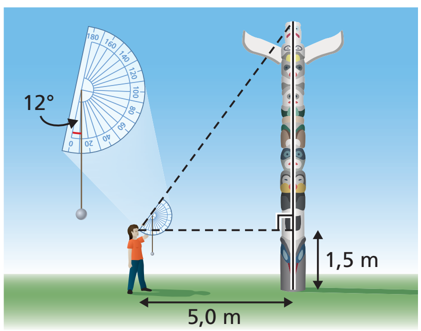
Évalue ta compréhension

1. Explique la relation entre l'angle indiqué sur le rapporteur de ton clinomètre et l'angle d'inclinaison mesuré à l'aide du clinomètre.

2. Une forestière se trouve à 10,0 m du pied d'un arbre. Elle utilise un clinomètre pour viser le sommet de l'arbre. Le rapporteur indique un angle de 40°. La forestière tient le clinomètre à 1,6 m au-dessus du sol. Détermine la hauteur de l'arbre, au dixième de mètre près. Le schéma *n'*est *pas* à l'échelle.



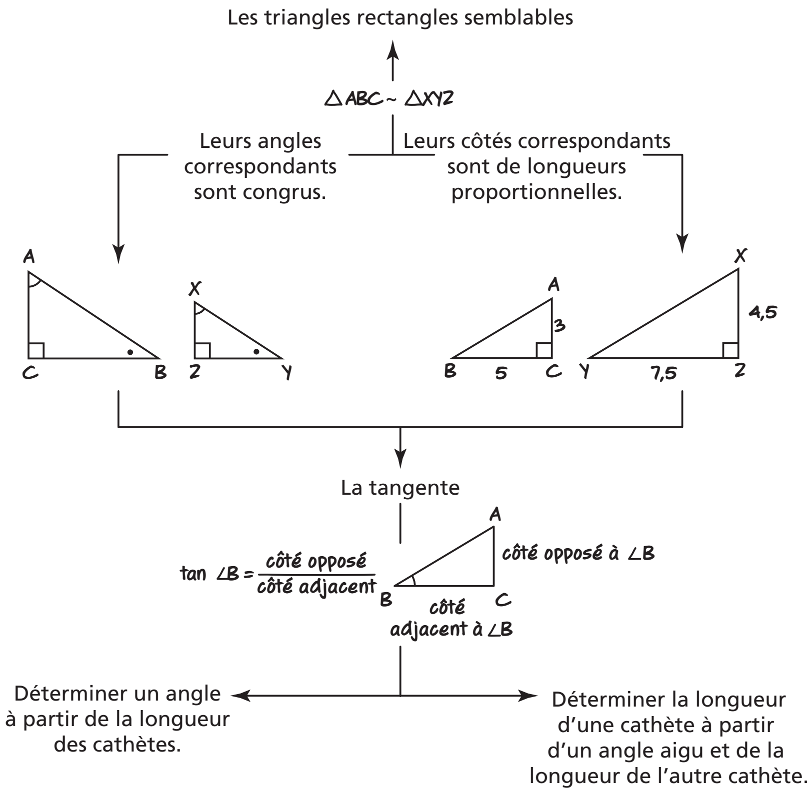
3. À l'aide des données du schéma, calcule la hauteur d'un totem observé à l'aide d'un clinomètre à paille. Indique la réponse au mètre près. Le schéma *n'*est *pas* à l'échelle.

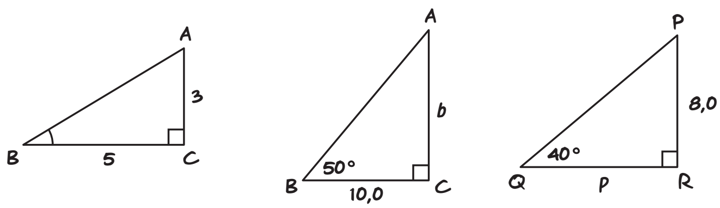


Tu auras encore besoin de ton clinomètre à la section Révision.

PAUSE VÉRIFICATION 1

Liens





$\tan \angle B = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

$\tan \angle B = \dfrac{3}{5}$

$\tan \angle B = 0,6$

$\angle B \approx 31°$

$\tan \angle B = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

$\tan 50° = \dfrac{b}{10}$

$b = 10 \tan 50°$

$b \approx 11,9$

$\tan \angle Q = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

$\tan 40° = \dfrac{8}{p}$

$p = \dfrac{8}{\tan 40°}$

$p \approx 9,5$

ou

$\angle P = 90° - \angle Q$

$\angle P = 50°$

$\tan \angle P = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

$\tan 50° = \dfrac{p}{8}$

$p = 8 \tan 50°$

$p \approx 9,5$

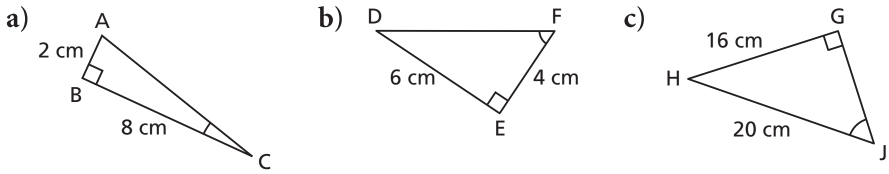
Présentation des concepts

- **Dans la leçon 2.1 :**
  - tu as utilisé tes connaissances sur les triangles rectangles semblables pour découvrir la **tangente** ;
  - tu as utilisé la tangente **pour déterminer un angle aigu** d'un triangle rectangle dont tu connais la longueur des cathètes.
- **Dans la leçon 2.2**, tu as appris à déterminer la **longueur d'une cathète** d'un triangle rectangle à partir de la mesure d'un angle aigu et de la longueur de l'autre cathète.
- **Dans la leçon 2.3**, tu as utilisé la tangente pour résoudre un problème de mesure concret.

Évalue ta compréhension

2.1

1. Détermine la mesure de chaque angle indiqué, au degré près.

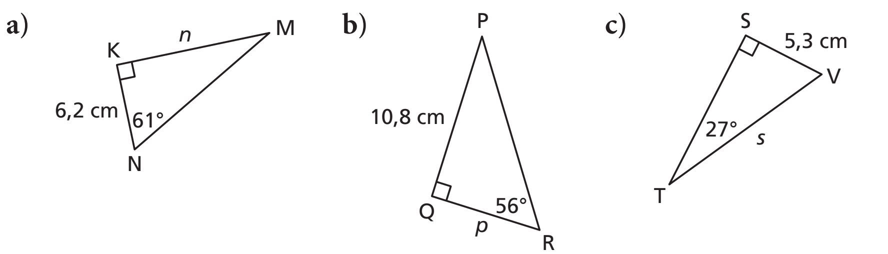


2. Pourquoi la tangente d'un angle augmente-t-elle lorsque la mesure de l'angle augmente ?

3. Un avion volant à 1 000 m d'altitude est à 5 000 m de la piste d'atterrissage. Quelle est la mesure de l'angle formé par le sol et la ligne de vision d'un observateur posté au début de la piste ? Donne la réponse au dixième de degré près.

2.2

4. Détermine la longueur de chaque côté indiqué, au dixième de centimètre près.



5. Un randonneur aperçoit une cheminée des fées sur une falaise de Willow Creek, en Alberta. Le randonneur se trouve à 9,1 m du pied de la falaise. De là, l'angle formé par la ligne de vision vers le sommet de la cheminée des fées et le sol est de 69°. À environ quelle hauteur par rapport au sol le sommet de la cheminée des fées se trouve-t-il ?

2.4 Le sinus et le cosinus

OBJECTIF DE LA LEÇON

Développer le sinus et le cosinus, et les utiliser pour déterminer la mesure d'angles.

Établis des liens

La voie ferrée qui relie Field et Hector, en Colombie-Britannique, comporte des tunnels en spirale à travers les montagnes. Ces tunnels ont été aménagés au début des années 1900 afin de réduire la pente de la voie ferrée. Ainsi, il est possible de voir un long train passer en dessous de lui-même à sa sortie d'un tunnel dans lequel il n'a pas fini d'entrer.

Imagine que tu redresses cette partie de la voie ferrée et qu'elle forme l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Voici le tracé de la voie ferrée avant la construction des tunnels. Le schéma *n*'est *pas* à l'échelle.

Comment peux-tu faire pour déterminer l'angle d'inclinaison de la voie ferrée ?

Développe ta compréhension

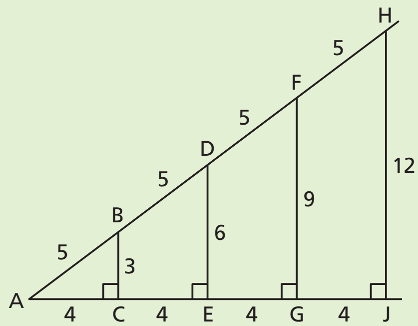
Tu as vu comment établir la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle. Tu peux établir deux autres rapports afin de comparer la longueur des côtés du triangle. Chaque rapport fait intervenir l'hypoténuse.

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.

Tu as besoin de papier quadrillé, d'une règle et d'un rapporteur.

A. Examine les triangles rectangles emboîtés ci-dessous.



$\angle$A est commun à tous les triangles. Quelle relation y a-t-il entre les autres angles aigus de cet ensemble de triangles ? Comment le sais-tu ? Quelle relation y a-t-il entre les triangles ?

B. Copie ce tableau et remplis-le.

Triangle	Longueur des côtés			Rapports	
	hypoténuse	côté opposé à $\angle$A	côté adjacent à $\angle$A	$\frac{\text{côté opposé à } \angle A}{\text{hypoténuse}}$	$\frac{\text{côté adjacent à } \angle A}{\text{hypoténuse}}$
$\triangle$ABC					
$\triangle$ADE					
$\triangle$AFG					
$\triangle$AHJ					

C. Dessine un autre ensemble de triangles rectangles emboîtés, mais non semblables aux triangles à l'étape A.

D. Mesure les côtés et les angles de chaque triangle. Indique les mesures dans ton schéma.

E. Remplis un tableau semblable à celui du point B à partir de tes triangles.

F. Pour chaque ensemble de triangles, que remarques-tu quand tu compares les rapports ?

G. De quoi la valeur de chaque rapport dépend-elle ?

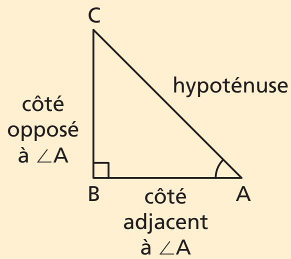
Dans un triangle rectangle, les rapports entre chaque cathète et l'hypoténuse dépendent uniquement de la mesure de l'angle aigu, et non de la taille du triangle. Ces rapports portent les noms de **sinus** et de **cosinus.**

Pour le sinus de $\angle$A, écris « sin $\angle$A ». Pour le cosinus de $\angle$A, écris « cos $\angle$A ».

Le sinus

Si $\angle$A est un angle aigu d'un triangle rectangle, alors :

$$\sin \angle A = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \angle A}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$



Le cosinus

Si $\angle$A est un angle aigu d'un triangle rectangle, alors :

$$\cos \angle A = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \angle A}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

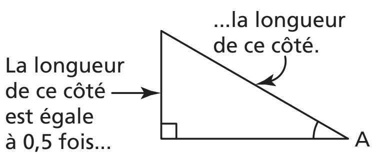
La tangente, le sinus et le cosinus sont les **rapports trigonométriques de base.** Le mot **trigonométrie** vient de trois mots grecs qui, ensemble, signifient « trois mesures d'angles ».

La **trigonométrie** est la branche des mathématiques qui décrit les relations entre les côtés et les angles des triangles.

Les valeurs du sinus et du cosinus, qui indiquent la relation entre les longueurs des côtés, s'expriment souvent sous la forme d'un nombre décimal. Ainsi, dans le triangle rectangle ABC :

Si sin $\angle$A $= 0{,}5$, alors, dans n'importe quel triangle rectangle semblable, la longueur du côté opposé à $\angle$A est égale à 0,5 fois la longueur de l'hypoténuse.

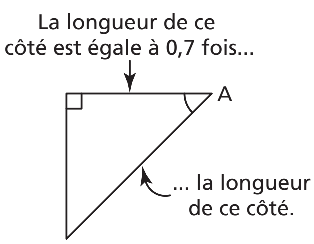
Qu'arrive-t-il à sin $\angle$A lorsque $\angle$A s'approche de 0° ?



sin $\angle$A = 0,5

Si cos $\angle$A $= 0{,}7$, alors, dans n'importe quel triangle rectangle semblable, la longueur du côté adjacent à $\angle$A est égale à 0,7 fois la longueur de l'hypoténuse.

Qu'arrive-t-il à cos $\angle$A lorsque $\angle$A s'approche de 0° ?

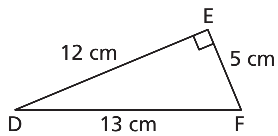


cos $\angle$A = 0,7

Exemple 1 Déterminer le sinus et le cosinus d'un angle

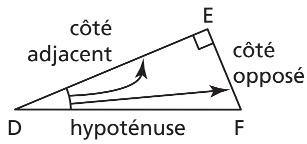
a) Nomme le côté opposé à $\angle$D dans le $\triangle$DEF et le côté adjacent à $\angle$D.

b) Détermine sin $\angle$D et cos $\angle$D, au centième près.



SOLUTION

a) Dans le $\triangle$DEF, $\overline{DF}$ est l'hypoténuse. $\overline{EF}$ est le côté opposé à $\angle$D, et $\overline{DE}$ est le côté adjacent à $\angle$D.



b) $\sin \angle D = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

$\sin \angle D = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$ $\overline{EF}$ est le côté opposé à $\angle$D et $\overline{DF}$ est l'hypoténuse.

$\sin \angle D = \dfrac{5}{13}$

$\sin \angle D = 0{,}384\,6\ldots$

$\sin \angle D \approx 0{,}38$

$\cos \angle D = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

$\cos \angle D = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$ $\overline{DE}$ est le côté adjacent à $\angle$D et $\overline{DF}$ est l'hypoténuse.

$\cos \angle D = \dfrac{12}{13}$

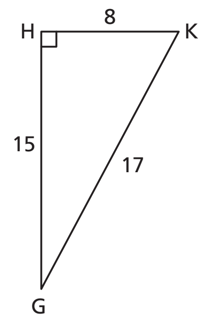
$\cos \angle D = 0{,}923\,0\ldots$

$\cos \angle D \approx 0{,}92$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. **a)** Nomme le côté opposé à $\angle$G dans le $\triangle$GHK et le côté adjacent à $\angle$G.

b) Détermine sin $\angle$G et cos $\angle$G, au centième près.



[Réponses : a) $\overline{HK}$, $\overline{HG}$;
b) sin $\angle$G $\approx$ 0,47 et cos $\angle$G $\approx$ 0,88]

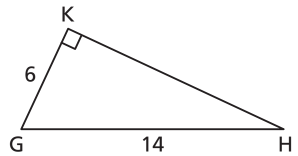
Détermine sin $\angle$F et cos $\angle$F. Quelle relation y a-t-il entre ces valeurs et sin $\angle$D et cos $\angle$D ?

Sur une calculatrice scientifique, ces opérations permettent de déterminer la mesure d'un angle :

- quand tu connais le sinus, utilise la fonction réciproque du sinus ($\sin^{-1}$) ;
- quand tu connais le cosinus, utilise la fonction réciproque du cosinus ($\cos^{-1}$).

Exemple 2 Déterminer la mesure d'un angle à l'aide du sinus ou du cosinus

Détermine la mesure de $\angle$G et celle de $\angle$H, au dixième de degré près.



SOLUTIONS

Méthode n° 1

Détermine d'abord la mesure de $\angle$H.

Dans le $\triangle$GHK :

$$\sin \angle H = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$\overline{GK}$ est le côté opposé à $\angle$H et $\overline{GH}$ est l'hypoténuse.

$$\sin \angle H = \frac{\overline{GK}}{\overline{GH}}$$

$$\sin \angle H = \frac{6}{14}$$

$$\angle H = 25{,}376\,9\ldots°$$

sin⁻¹(6/14)
25.37693353

$$\angle G + \angle H = 90°$$

$$\angle G = 90° - \angle H$$

La somme des angles de n'importe quel triangle est de 180°. Alors, la somme des deux angles aigus d'un triangle rectangle est de 90°.

Alors, $\angle G = 90° - 25{,}376\,9\ldots°$

$$\angle G = 64{,}623\,0\ldots°$$

Méthode n° 2

Détermine d'abord la mesure de $\angle$G.

Dans le $\triangle$GHK :

$$\cos \angle G = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$\overline{GK}$ est le côté adjacent à $\angle$G et $\overline{GH}$ est l'hypoténuse.

$$\cos \angle G = \frac{\overline{GK}}{\overline{GH}}$$

$$\cos \angle G = \frac{6}{14}$$

$$\angle G = 64{,}623\,0\ldots°$$

cos⁻¹(6/14)
64.62306647

$$\angle G + \angle H = 90°$$

La somme des deux angles aigus est de 90°.

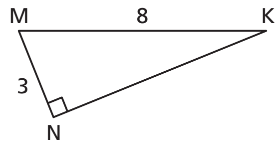
Alors, $\angle H = 90° - 64{,}623\,0\ldots°$

$$\angle H = 25{,}376\,9\ldots°$$

$\angle$G mesure environ 64,6° et $\angle$H mesure environ 25,4°.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Détermine la mesure de $\angle$K et celle de $\angle$M, au dixième de degré près.



[Réponse : $\angle K \approx 22{,}0°$, $\angle M \approx 68{,}0°$]

Quelle est la relation entre cos $\angle$G et sin $\angle$H ? Explique pourquoi cette relation existe.

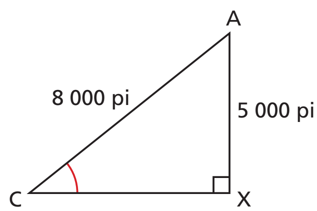
Tu peux résoudre des problèmes modélisés par un triangle rectangle à l'aide du sinus ou du cosinus, si tu connais la longueur de l'hypoténuse et la longueur d'une cathète ou la mesure d'un angle aigu.

Exemple 3 Résoudre un problème à l'aide du sinus ou du cosinus

Un avion vole à une altitude de 5 000 pi. Le radar de l'avion montre qu'il se trouve à 8 000 pi de la cible. Quel est l'**angle d'élévation** de l'avion mesuré à partir de la cible, au degré près ?

SOLUTION

Trace un schéma pour représenter les données du problème.
Une altitude est une mesure verticale.
Suppose que le sol est horizontal.



$\angle C$ est l'angle d'élévation de l'avion.

$\overline{AX}$ est l'altitude de l'avion.

$\overline{CA}$ est la distance entre la cible et l'avion.

Dans le triangle rectangle ACX :

$$\sin \angle C = \frac{\overline{AX}}{\overline{CA}}$$

$$\sin \angle C = \frac{5\ 000}{8\ 000}$$

$\overline{AX}$ est opposé à $\angle C$ et $\overline{CA}$ est l'hypothénuse.

```
sin⁻¹(5000/8000)
      38.68218745
```

$$\angle C \approx 39°$$

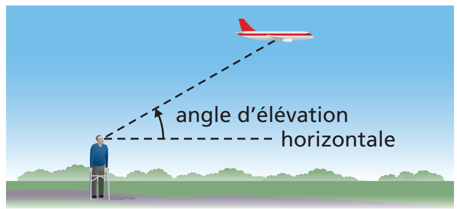
L'angle d'élévation de l'avion est d'environ 39°.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Un observateur assis sur un quai du port de Vancouver regarde un hydravion. À un moment donné, l'hydravion se trouve à 300 m au-dessus de l'eau et à 430 m de l'observateur. Détermine l'angle d'élévation de l'hydravion mesuré à partir de l'observateur, au degré près.

[Réponse : environ 44°]

L'**angle d'élévation** d'un objet est l'angle formé par l'horizontale et la ligne de vision d'un observateur.



Place à la discussion

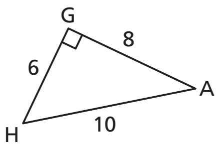
1. Quand peux-tu déterminer la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle à partir du sinus ? À partir du cosinus ?
2. Pourquoi est-il important de faire un schéma avant de résoudre un problème ?
3. Pourquoi les valeurs du sinus d'un angle aigu et du cosinus d'un angle aigu sont-elles plus petites que 1 ?

Exercices

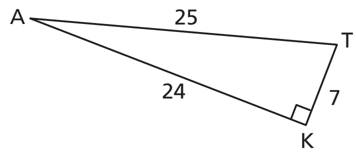
A

4. **a)** Pour chaque triangle ci-dessous :
- nomme le côté opposé à $\angle A$,
- nomme le côté adjacent à $\angle A$,
- nomme l'hypoténuse.

I)



II)



b) Détermine sin $\angle A$ et cos $\angle A$, au centième près, pour chaque triangle de la partie a).

5. Détermine le sinus et le cosinus de chaque angle, au centième près.

a) 57° **b)** 5° **c)** 19° **d)** 81°

6. Détermine la mesure de chaque $\angle X$, au degré près.

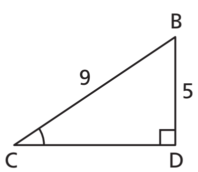
a) $\sin \angle X = 0{,}25$ **b)** $\cos \angle X = 0{,}64$

c) $\sin \angle X = \frac{6}{11}$ **d)** $\cos \angle X = \frac{7}{9}$

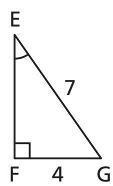
B

7. Détermine la mesure de chaque angle indiqué, au degré près.

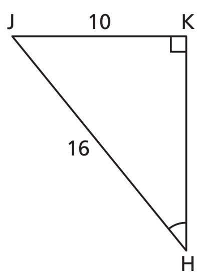
a)



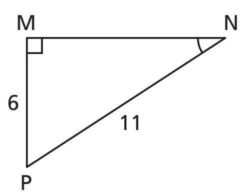
b)



c)

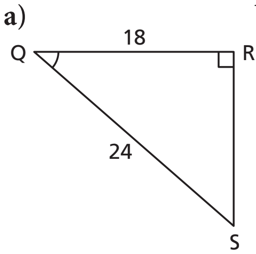


d)

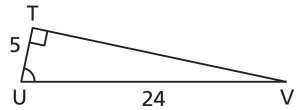


8. Détermine la mesure de chaque angle indiqué, au degré près.

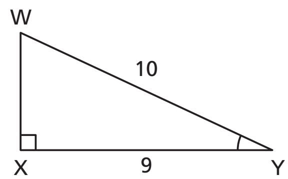
a)



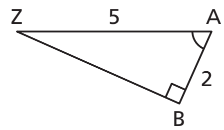
b)



c)



d)



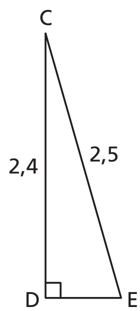
9. Dessine deux triangles rectangles différents pour chaque rapport ci-dessous et nomme leurs côtés.

a) $\sin \angle B = \frac{3}{5}$ **b)** $\cos \angle B = \frac{5}{8}$

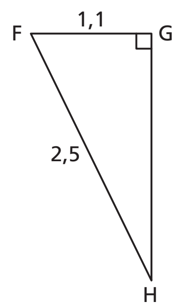
c) $\sin \angle B = \frac{1}{4}$ **d)** $\cos \angle B = \frac{4}{9}$

10. Détermine la mesure de chaque angle aigu, au dixième de degré près, à l'aide du sinus ou du cosinus. Décris ta stratégie.

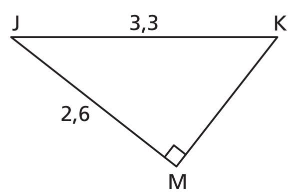
a)



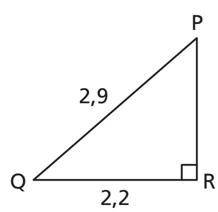
b)



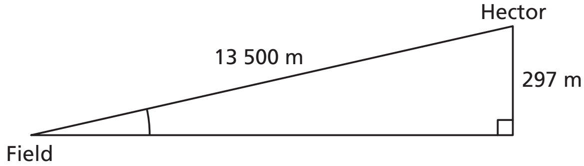
c)



d)



11. Suppose qu'on élimine les virages des tunnels en spirale de la voie ferrée qui relie Field et Hector. La voie ferrée ressemblerait au schéma ci-dessous. Ce schéma *n'*est *pas* à l'échelle. Quel est l'angle d'inclinaison de la voie ferrée, au dixième de degré près ?



12. Une échelle de 6,5 m est appuyée contre un mur. Son pied se trouve à 1,2 m du mur. Quel est l'angle d'inclinaison de l'échelle, au dixième de degré près ?

13. Une corde de 2,4 m retient une tente. La corde est attachée à la tente en un point situé à 2,1 m du sol. Quel est l'angle d'inclinaison de la corde, au degré près ?

14. La longueur d'un rectangle est de 4,8 cm et la longueur de chaque diagonale est de 5,6 cm. Quelle est la mesure de l'angle formé par une diagonale et un côté plus long du rectangle ? Indique ta réponse au degré près.

15. **a)** Calcule chaque valeur.

i) sin 10° ii) sin 20° iii) sin 40°
iv) sin 50° v) sin 60° vi) sin 80°

b) Pourquoi le sinus d'un angle aigu augmente-t-il lorsque la mesure de l'angle augmente ?

16. Dessine un triangle rectangle isocèle. Explique pourquoi le cosinus de chaque angle aigu est égal au sinus du même angle.

C

17. La hauteur d'un silo est de 37 pi et son diamètre est de 14 pi. Un escalier en spirale contourne le silo une seule fois et atteint le sommet de celui-ci. Quel est l'angle d'inclinaison de l'escalier, au degré près ?

18. **a)** Nous avons défini le sinus et le cosinus d'angles aigus. Détermine les sinus et cosinus suivants à l'aide d'une calculatrice.

i) sin 90° ii) sin 0° iii) cos 90° iv) cos 0°

b) Dessine un triangle rectangle. Explique les résultats obtenus en a) à l'aide de ce dessin.

Réfléchis

Quand utiliserais-tu le sinus ou le cosinus au lieu de la tangente pour déterminer la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle ? Cite des exemples.

L'UNIVERS DES MATHS

Le monde du travail : Les outilleurs-ajusteurs

Cette outilleuse-ajusteuse fabrique des outils et des matrices pour la production d'objets courants tels que des bouchons. Une *matrice* consiste en deux plaques qui se pressent l'une contre l'autre. L'outilleuse-ajusteuse utilise la trigonométrie pour construire une matrice. Elle travaille à partir d'un plan qui indique les dimensions de l'objet. Pour couper le matériel de la matrice, l'outilleuse-ajusteuse doit ajuster la machine à fraiser à un angle précis.

2.5 Déterminer des mesures de longueur à l'aide du sinus et du cosinus

OBJECTIF DE LA LEÇON

Déterminer des longueurs de façon indirecte à l'aide du sinus et du cosinus.

Établis des liens

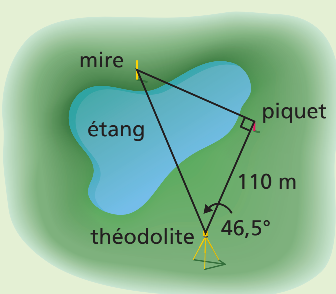
Les arpenteurs-géomètres peuvent mesurer un angle de façon précise à l'aide d'un instrument appelé *théodolite*. Un mètre à ruban sert à mesurer les distances. Comment les arpenteurs-géomètres peuvent-ils utiliser ces mesures et leurs connaissances en trigonométrie du triangle rectangle pour déterminer les longueurs qu'ils ne peuvent pas mesurer directement ?

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille avec une ou un camarade.

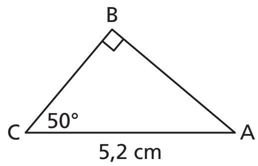
Le schéma indique des mesures prises par des arpenteurs-géomètres. Comment peux-tu déterminer la distance entre le théodolite et la mire ?



Tu peux utiliser le sinus ou le cosinus pour écrire une équation dont la solution correspond à la mesure d'une cathète d'un triangle rectangle si tu connais la mesure d'un angle aigu et la longueur de l'hypoténuse.

Exemple 1 Déterminer la longueur d'une cathète à l'aide du sinus ou du cosinus

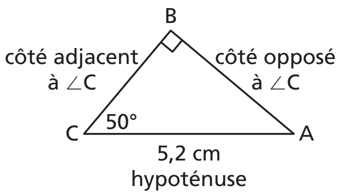
Détermine la longueur de $\overline{BC}$, au dixième de centimètre près.



SOLUTION

Dans le $\triangle$ABC, $\overline{AC}$ est l'hypoténuse et $\overline{BC}$ est le côté adjacent à $\angle$C.

Choisis le rapport qui compare le côté adjacent et l'hypoténuse.



Écris une équation à partir du cosinus.

$$\cos \angle C = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \angle C = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\cos 50° = \frac{\overline{BC}}{5,2}$$

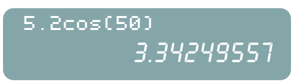
Résous l'équation.

Multiplie les deux membres de l'équation par 5,2.

$$5,2 \cos 50° = \frac{(5,2)(\overline{BC})}{5,2}$$

$$5,2 \cos 50° = \overline{BC}$$

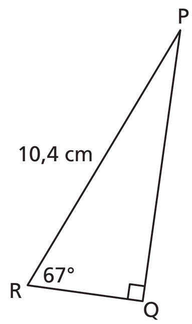
$$\overline{BC} = 3,342\,4\ldots$$



$\overline{BC}$ mesure environ 3,3 cm.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Détermine la longueur de $\overline{PQ}$, au dixième de centimètre près.



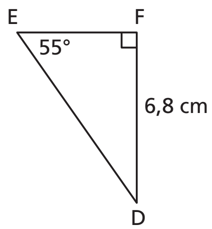
[Réponse : $\overline{PQ} \approx$ 9,6 cm]

Comment aurais-tu pu résoudre ce problème à l'aide du sinus ?

Le sinus et le cosinus te permettent de déterminer la longueur de l'hypoténuse lorsque tu connais la mesure d'un angle aigu et la longueur d'une cathète.

Exemple 2 Déterminer la longueur de l'hypoténuse à l'aide du sinus ou du cosinus

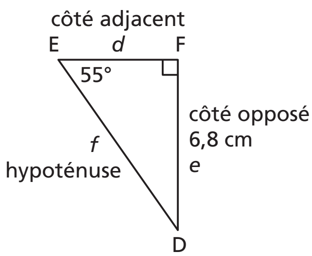
Détermine la longueur de $\overline{DE}$, au dixième de centimètre près.



SOLUTION

Dans le $\triangle DEF$, $\overline{DE}$ est l'hypoténuse et $\overline{DF}$ est le côté opposé à $\angle E$.

Le sinus est le rapport du côté opposé à l'hypoténuse. Indique la longueur des côtés à l'aide de lettres minuscules.



Écris une équation à partir du sinus.

$$\sin \angle E = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \angle E = \frac{e}{f}$$

$$\sin 55° = \frac{6{,}8}{f}$$

Résous l'équation.

Multiplie les deux membres de l'équation par *f*.

$$f \sin 55° = \frac{6{,}8\,f}{f}$$

$$f \sin 55° = 6{,}8$$

Divise les deux membres de l'équation par sin 55°.

$$\frac{f \sin 55°}{\sin 55°} = \frac{6{,}8}{\sin 55°}$$

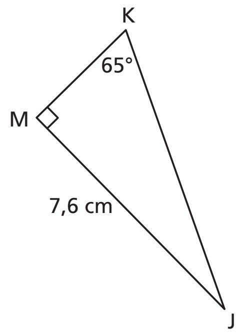
$$f = \frac{6{,}8}{\sin 55°}$$

$$f = 8{,}301\,2\ldots$$

$\overline{DE}$ mesure environ 8,3 cm.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

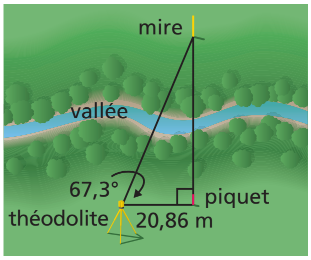
2. Détermine la longueur de $\overline{JK}$, au dixième de centimètre près.



[Réponse : $\overline{JK} \approx 8{,}4$ cm]

Exemple 3 Résoudre un problème de mesure indirecte

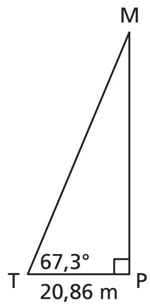
Une arpenteuse-géomètre a pris les mesures indiquées dans le schéma. Comment peut-elle déterminer la distance qui sépare le théodolite de la mire, au centième de mètre près ?



SOLUTION

Trace un schéma annoté pour représenter les données du problème.

La distance recherchée est l'hypoténuse du △MPT.



Dans le △MPT, $\overline{TM}$ est l'hypoténuse et $\overline{TP}$ est le côté adjacent à ∠T.

Écris une équation à partir du cosinus.

$$\cos \angle T = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \angle T = \frac{\overline{TP}}{\overline{TM}}$$

$$\cos 67{,}3° = \frac{20{,}86}{\overline{TM}}$$

Résous l'équation.

Multiplie les deux membres de l'équation par $\overline{TM}$.

$$\overline{TM} \cos 67{,}3° = \frac{(\overline{TM})(20{,}86)}{\overline{TM}}$$

$$\overline{TM} \cos 67{,}3° = 20{,}86$$

Divise les deux membres de l'équation par cos 67,3°.

$$\frac{\overline{TM} \cos 67{,}3°}{\cos 67{,}3°} = \frac{20{,}86}{\cos 67{,}3°}$$

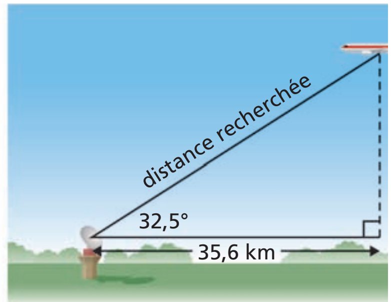
$$\overline{TM} = \frac{20{,}86}{\cos 67{,}3°}$$

$$\overline{TM} = 54{,}054\,6\ldots$$

La distance qui sépare le théodolite de la mire est d'environ 54,05 m.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. À partir d'une station radar, l'angle d'élévation d'un avion qui s'approche est de 32,5°. La distance horizontale entre l'avion et la station radar est de 35,6 km. À quelle distance de la station radar se trouve l'avion, au dixième de kilomètre près ?



[Réponse : 42,2 km]

Comment ferais-tu pour résoudre l'exemple 3 à l'aide du sinus au lieu du cosinus ? Comment pourrais-tu utiliser la tangente ?

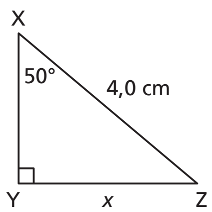
Place à la discussion

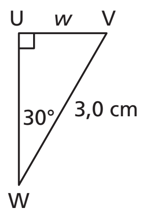
1. Quels avantages y a-t-il à utiliser un rapport trigonométrique au lieu d'un dessin précis pour résoudre un problème de mesure ?
2. Quand déterminerais-tu la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à l'aide du sinus ? Quand le ferais-tu à l'aide du cosinus ?

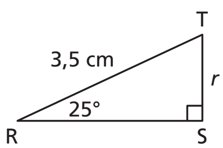
Exercices

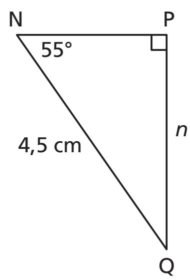
A

3. Détermine la longueur du côté indiqué dans chaque triangle, au dixième de centimètre près.

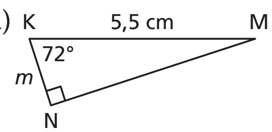
a)


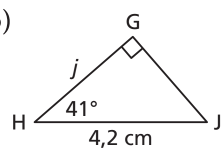
b)


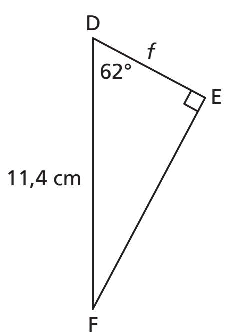
c)


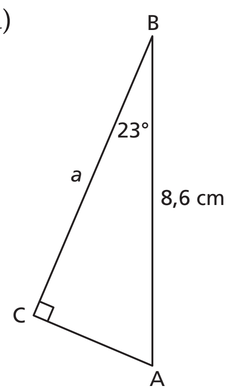
d)


4. Détermine la longueur du côté indiqué dans chaque triangle, au dixième de centimètre près.

a)


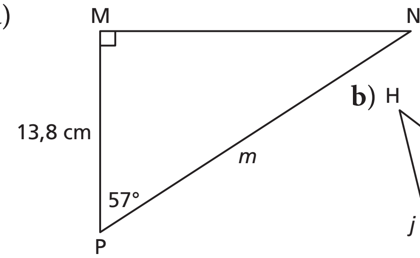
b)


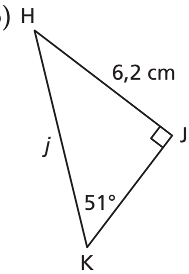
c)


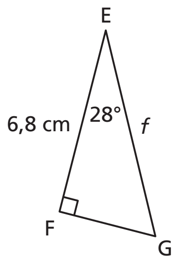
d)


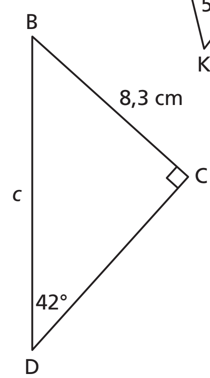
B

5. Détermine la longueur du côté indiqué dans chaque triangle, au dixième de centimètre près.

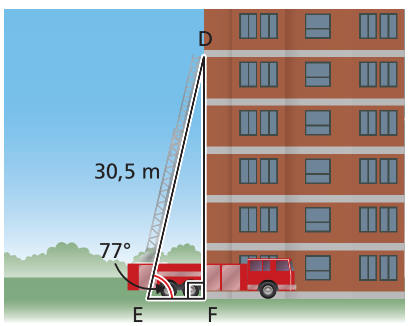
a)


b)


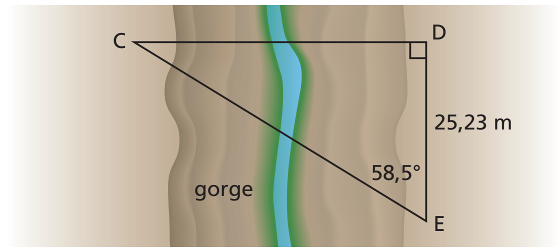
c)


d)


6. Un camion d'incendie a une grande échelle qui mesure 30,5 m à partir du sol. L'angle d'inclinaison de l'échelle est de 77°.
Quelle hauteur maximale l'échelle peut-elle atteindre sur le mur d'un édifice, au dixième de mètre près ?



7. Un arpenteur-géomètre a pris les mesures indiquées dans le schéma afin de déterminer la distance du point C au point E de part et d'autre d'une gorge.



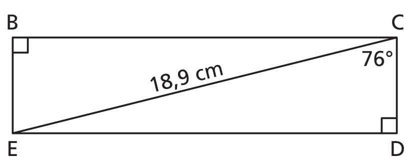
a) Quelle est la distance entre les points C et E, au dixième de mètre près?

b) Comment l'arpenteur-géomètre peut-il déterminer la distance entre les points C et D?

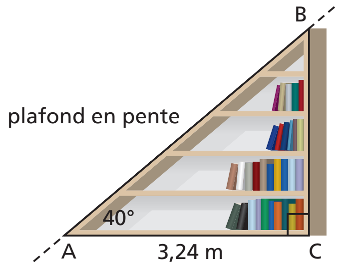
8. Un navire quitte les îles de la Reine-Charlotte vers le nord. À un moment donné, le navigateur aperçoit le phare de Langara Point au sud du navire. Le navire se déplace ensuite de 3,5 km vers l'est. L'angle formé par la trajectoire du navire et la ligne de vision vers le phare est de 28,5°. À quelle distance du phare le navire se trouve-t-il, au dixième de kilomètre près?

9. Un avion approche d'un aéroport. À une altitude de 939 m, son angle d'élévation, mesuré à partir de l'aéroport, est de 19,5°. À quelle distance l'avion se trouve-t-il de l'aéroport, au mètre près?

10. Détermine les dimensions de ce rectangle, au dixième de centimètre près.



11. Une bibliothèque est aménagée le long du plafond en pente d'un grenier. La base de la bibliothèque mesure 3,24 m de longueur. L'angle d'inclinaison du plafond du grenier est de 40°.

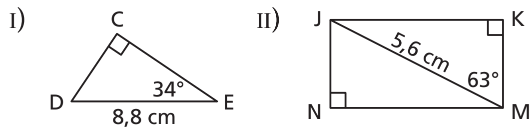


a) Quelle est la longueur du dessus de la bibliothèque, mesurée le long du plafond?

b) Quelle est la hauteur maximale de la bibliothèque?

Indique tes réponses au centimètre près.

12. a) Détermine le périmètre de chaque figure, au dixième de centimètre près.



b) Quelles stratégies as-tu utilisées pour répondre à la partie a)? Quelles autres stratégies aurais-tu pu utiliser?

C

13. Dans le trapèze CDEF, $\angle D = \angle E = 90°$, $\angle C = 60°$, $\overline{EF} = 4,5$ cm et $\overline{DE} = 3,5$ cm. Quel est le périmètre du trapèze, au millimètre près? Décris ta stratégie.

14. Le levé d'un terrain à bâtir qui a la forme d'un triangle acutangle fournit les données suivantes:

- Deux côtés concourants mesurent 250 pi et 170 pi de longueur.
- L'angle entre ces côtés mesure 55°.

a) Si le côté de 250 pi est la base du triangle, quelle est la hauteur du triangle?

b) Détermine l'aire du terrain, au pied carré près.

Réfléchis

Décris les cas dans lesquels tu détermines la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à l'aide du sinus ou du cosinus plutôt qu'à l'aide de la tangente. Inclus des exemples.

PAUSE VÉRIFICATION 2

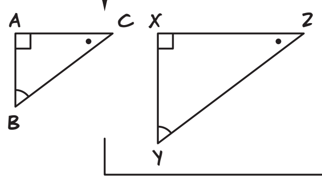
Liens

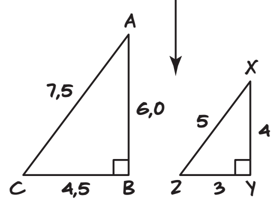
Les triangles rectangles semblables

$\triangle ABC \sim \triangle XYZ$

Leurs angles correspondants sont congrus.

Leurs côtés correspondants sont de longueurs proportionnelles.

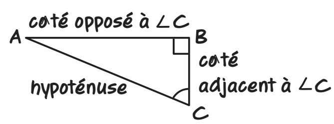




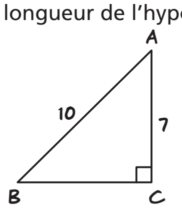
Le sinus et le cosinus

$\sin \angle C = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

$\cos \angle C = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$



Déterminer un angle à partir de la longueur d'une cathète et de la longueur de l'hypoténuse.



$\sin \angle B = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

$\sin \angle B = \dfrac{7}{10}$

$\sin \angle B = 0{,}7$

$\angle B = 44°$

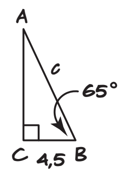
$\cos \angle A = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

$\cos \angle A = \dfrac{7}{10}$

$\cos \angle A = 0{,}7$

$\angle A = 46°$

Déterminer la longueur d'un côté à partir de la mesure d'un angle et de la longueur d'un autre côté.



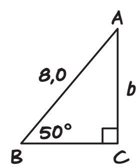
$\cos \angle B = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

$\cos 65° = \dfrac{4{,}5}{c}$

$c \cos 65° = 4{,}5$

$c = \dfrac{4{,}5}{\cos 65°}$

$c = 10{,}6$



$\sin \angle B = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

$\sin 50° = \dfrac{b}{8}$

$b = 8 \sin 50°$

$b = 6{,}1$

Présentation des concepts

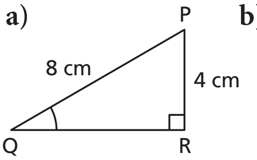
- **Dans la leçon 2.4 :**
  - tu as utilisé tes connaissances sur les triangles rectangles semblables pour découvrir le **sinus** et le **cosinus** ;
  - tu as utilisé le sinus ou le cosinus **pour déterminer un angle aigu** d'un triangle rectangle dont tu connais la longueur d'une cathète et de l'hypoténuse.
- **Dans la leçon 2.5 :**
  - tu as appris à déterminer la **longueur d'une cathète** d'un triangle rectangle à partir de la mesure d'un angle aigu et de la longueur de l'hypoténuse ;
  - tu as appris à déterminer la **longueur de l'hypoténuse** à partir de la mesure d'un angle aigu et de la longueur d'une cathète.

Évalue ta compréhension

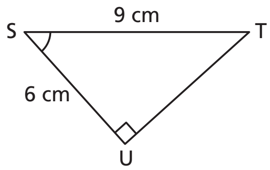
2.4

1. Détermine la mesure de chaque angle indiqué, au degré près.

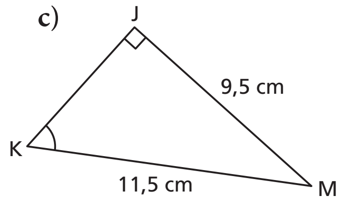
a)



b)



c)



2. Un directeur d'usine veut installer un convoyeur d'une longueur de 30 pi qui s'élève de 7 pi depuis la route jusqu'au quai de chargement. Quel est l'angle d'inclinaison du convoyeur, au degré près ?

3. **a)** Calcule le cosinus de chaque angle.

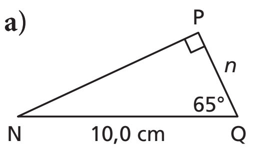
i) 10° ii) 20° iii) 30° iv) 40° v) 50° vi) 60° vii) 70° viii) 80°

b) Explique pourquoi le cosinus d'un angle aigu diminue à mesure que la mesure de l'angle augmente.

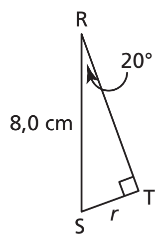
2.5

4. Détermine la longueur du côté indiqué dans chaque triangle, au dixième de centimètre près.

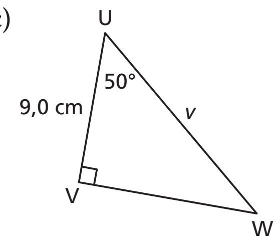
a)



b)



c)



5. Un navire quitte les îles de la Reine-Charlotte vers le sud. À un moment donné, le navigateur aperçoit le phare du cap St. James au nord du navire. Le navire se déplace ensuite de 2,4 km vers l'ouest. L'angle formé par la trajectoire du navire et la ligne de vision vers le phare est de 41,5°. À quelle distance du phare le navire se trouve-t-il ?

2.6 Utiliser les rapports trigonométriques

OBJECTIF DE LA LEÇON

Résoudre un problème modélisé par un triangle rectangle à l'aide d'un rapport trigonométrique de base.

Établis des liens

On trouve des autobus à étage avec rampe d'accès à Victoria, en Colombie-Britannique. Lorsque l'autobus est abaissé, la rampe permet d'accéder à l'autobus à une hauteur de 4 po au-dessus du trottoir. La rampe d'accès mesure environ 3 pi et 3 po de longueur. Comment peux-tu déterminer son angle d'inclinaison ?

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille avec une ou un camarade.

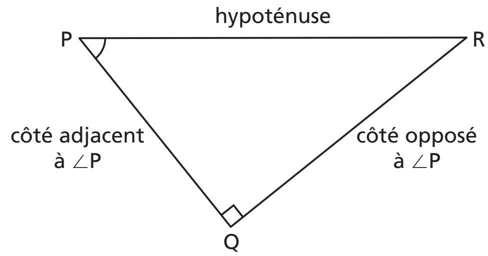
André conçoit une rampe d'accès pour fauteuil roulant pour sa sœur. Il connaît les données suivantes :

- La rampe s'élèvera de 1 pi à partir du sol jusqu'à l'entrée de la maison.
- La distance horizontale, de l'extrémité de la rampe qui touche le trottoir jusqu'à la porte, est de 20 pi.
- Le code du bâtiment stipule que l'angle d'inclinaison de la rampe d'accès doit être inférieur à 5°.

Détermine si le plan d'André respecte le code du bâtiment.

Résoudre un triangle consiste à déterminer la mesure de tous les angles et la longueur de tous les côtés du triangle.

Lorsque tu détermines la mesure de tous les angles et la longueur de tous les côtés d'un triangle rectangle, tu **résous le triangle.** Les trois rapports trigonométriques de base peuvent servir à résoudre un triangle.



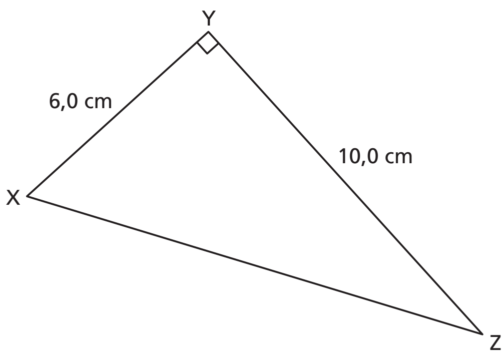
$$\tan \angle P = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\sin \angle P = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \angle P = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

Exemple 1 Résoudre un triangle rectangle à l'aide des cathètes

Résous le triangle rectangle XYZ. Indique les mesures au dixième près.



SOLUTIONS

Méthode nº 1

Détermine d'abord la longueur de $\overline{XZ}$.
Applique le théorème de Pythagore au $\triangle XYZ$.

$$\overline{XZ}^2 = 6{,}0^2 + 10{,}0^2$$

$$\overline{XZ}^2 = 36{,}00 + 100{,}00$$

$$\overline{XZ}^2 = 136{,}00$$

$$\overline{XZ} = \sqrt{136}$$

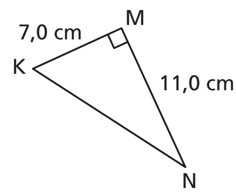
$$\overline{XZ} = 11{,}661\,9\ldots$$

$\overline{XZ}$ mesure environ 11,7 cm.

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Résous ce triangle. Indique les mesures au dixième près.



[Réponse : $\overline{KN} \approx 13{,}0$ cm ; $\angle K \approx 57{,}5°$; $\angle N \approx 32{,}5°$]

Détermine la mesure de $\angle Z$.

Puisque $\overline{YZ}$ est le côté adjacent à $\angle Z$ et que $\overline{XZ}$ est l'hypoténuse, utilise le cosinus.

$$\cos \angle Z = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \angle Z = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}}$$

$$\cos \angle Z = \frac{10{,}0}{\sqrt{136}}$$

$$\angle Z = 30{,}963\ 7\ldots°$$

Donc, $\angle X = 90° - \angle Z$

La somme des angles aigus d'un triangle rectangle est de 90°.

$$\angle X = 59{,}036\ 2\ldots°$$

Quel autre rapport trigonométrique aurais-tu pu utiliser dans la méthode n° 1 ? Pourquoi peut-il être préférable d'utiliser ce rapport ?

Méthode n° 2

Détermine d'abord la mesure des angles. Détermine la mesure de $\angle Z$ dans le $\triangle XYZ$.

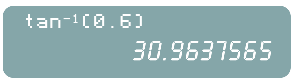
Puisque $\overline{YZ}$ est le côté adjacent à $\angle Z$ et que $\overline{XY}$ est le côté opposé à $\angle Z$, utilise la tangente.

$$\tan \angle Z = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \angle Z = \frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}$$

$$\tan \angle Z = \frac{6{,}0}{10{,}0}$$

$$\tan \angle Z = 0{,}6$$



$$\angle Z = 30{,}963\ 7\ldots°$$

Alors, $\angle X = 90° - \angle Z$

La somme des angles aigus d'un triangle rectangle est de 90°.

$$\angle X = 59{,}036\ 2\ldots°$$

Détermine la longueur de $\overline{XZ}$.

Puisque $\overline{YZ}$ est le côté adjacent à $\angle Z$ et que $\overline{XZ}$ est l'hypoténuse, utilise le cosinus.

$$\cos \angle Z = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \angle Z = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}}$$

$$\cos 30{,}963\ 7\ldots° = \frac{10{,}0}{\overline{XZ}}$$

Résous l'équation.
Multiplie les deux membres par $\overline{XZ}$.

$$\overline{XZ} \cos 30{,}963\ 7\ldots° = 10{,}0$$

Divise les deux membres par cos 30,963 7…°.

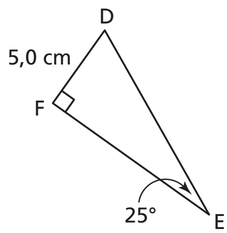
$$\overline{XZ} = \frac{10{,}0}{\cos 30{,}963\ 7\ldots°}$$

$$\overline{XZ} = 11{,}661\ 4\ldots$$

$\overline{XZ}$ mesure environ 11,7 cm.
$\angle X$ mesure environ 59,0° et
$\angle Z$ mesure environ 31,0°.

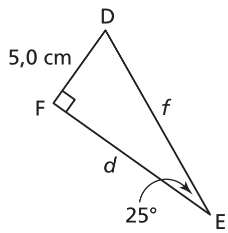
Exemple 2 — Résoudre un triangle rectangle à l'aide d'une cathète et d'un angle aigu

Résous ce triangle. Au besoin, arrondis les mesures au dixième près.



SOLUTION

Trace un schéma annoté.
Détermine d'abord la mesure de $\angle$D.
Dans le $\triangle$DEF :



$$\angle D + \angle E = 90°$$
$$\angle D = 90° - 25°$$
$$\angle D = 65°$$

Détermine la longueur de $\overline{EF}$.

Puisque $\overline{EF}$ est opposé à $\angle$D et que $\overline{DF}$ est adjacent à $\angle$D, utilise la tangente.

$$\tan \angle D = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$
$$\tan \angle D = \frac{d}{e}$$

Résous l'équation.
Multiplie les deux membres de l'équation par 5,0.

$$\tan 65° = \frac{d}{5{,}0}$$
$$5{,}0 \tan 65° = d$$
$$d = 10{,}722\,5\ldots$$

$\overline{EF}$ mesure environ 10, 7 cm.

Calcule la longueur de $\overline{DE}$ à l'aide du sinus.

$$\sin \angle E = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$
$$\sin \angle E = \frac{e}{f}$$

Résous l'équation.
Multiplie les deux membres de l'équation par *f*.

$$\sin 25° = \frac{5{,}0}{f}$$
$$f \sin 25° = 5{,}0$$

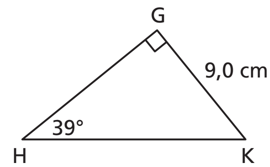
Divise les deux membres de l'équation par sin 25°.

$$f = \frac{5{,}0}{\sin 25°}$$
$$f = 11{,}831\,0\ldots$$

$\overline{DE}$ mesure environ 11,8 cm.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Résous ce triangle. Au besoin, arrondis les mesures au dixième près.

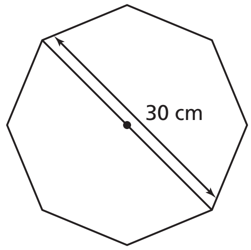


[Réponse : $\angle K = 51°$; $\overline{GH} \approx 11{,}1$ cm ; $\overline{HK} \approx 14{,}3$ cm]

Quel avantage y a-t-il à déterminer l'angle inconnu avant les côtés inconnus ?

Exemple 3 Résoudre un problème à l'aide des rapports trigonométriques

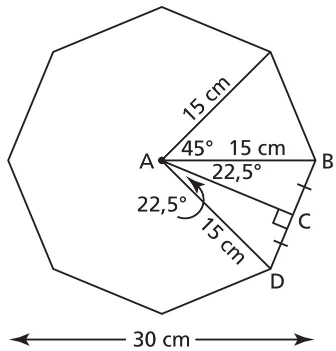
Une petite table a la forme d'un octogone régulier. La distance d'un sommet de l'octogone au sommet opposé, en passant par le centre, est d'environ 30 cm. Une bande de placage de bois couvre le rebord de la table. Quelle est la longueur de cette bande, au centimètre près ?



SOLUTION

Pour connaître la longueur de la bande de placage, détermine le périmètre du dessus de la table.

Puisqu'il s'agit d'un octogone régulier, il est possible de former des triangles isocèles en traçant des segments de droite qui vont du centre de l'octogone jusqu'à chaque sommet.



Dans chaque triangle, l'angle au centre est :

$360° \div 8 = 45°$

Le segment de droite qui relie le centre de l'octogone au point milieu de chacun des côtés divise chaque angle au centre en deux parties égales et est perpendiculaire au côté.

Alors, dans le $\triangle ABC$,

$$\angle A = 22{,}5° \text{ et } \overline{AB} = 15 \text{ cm}$$

$$\sin \angle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Résous l'équation.
Multiplie les deux membres de l'équation par 15.

$$\sin 22{,}5° = \frac{\overline{BC}}{15}$$

$$15 \sin 22{,}5° = \overline{BC}$$

Puisque $\overline{BC} = 15 \sin 22{,}5°$, alors $\overline{BD} = 2(15 \sin 22{,}5°)$ et $\overline{BD} = 30 \sin 22{,}5°$

Le périmètre de l'octogone est :

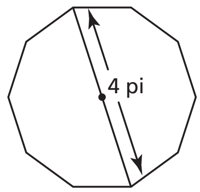
$8(\overline{BD}) = 8(30 \sin 22{,}5°)$

$8(\overline{BD}) = 91{,}844\,0\ldots$

La bande de placage de bois a environ 92 cm de longueur.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Une fenêtre a la forme d'un décagone régulier. La distance d'un sommet au sommet opposé, en passant par le centre, est d'environ 4 pi. Détermine la longueur de la moulure de bois qui forme le cadre de la fenêtre, au pied près.



[Réponse : environ 12 pi]

L'UNIVERS DES MATHS

Autour de nous : Une énergie renouvelable

Des communautés aborigènes et nordiques ont à cœur de produire une énergie durable à partir de sources telles que des éoliennes, des panneaux solaires ainsi que des projets géothermiques et hydroélectriques.

Cette Weather Dancer 1 est une éolienne de 900 kW située sur les terres de la nation Piikani, dans le sud de l'Alberta. L'éolienne, installée en 2001, a été construite et est gérée conjointement par la Piikani Indian Utility Corporation et EPCOR, une entreprise énergétique d'Edmonton. Weather Dancer 1 génère 9 960 MWh d'énergie propre par année. Son nom rend hommage à l'Okan (danse du soleil), une cérémonie traditionnelle pendant laquelle les Pieds-Noirs renouvellent leur relation avec les forces vitales de la nature.

Comment peux-tu déterminer la longueur de la pale d'une éolienne à l'aide de la trigonométrie ?

Place à la discussion

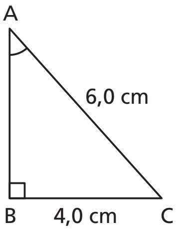
1. Quand tu résous un triangle rectangle, tu détermines parfois la mesure d'un angle inconnu avant de trouver la longueur d'un côté inconnu, et tu fais parfois l'inverse. Comment choisis-tu la première mesure à déterminer ?

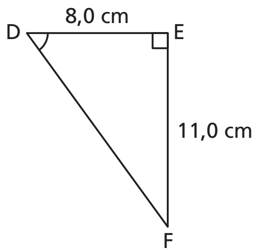
2. Est-il possible de résoudre un triangle rectangle à partir de la mesure des deux angles aigus seulement ? Justifie ta réponse.

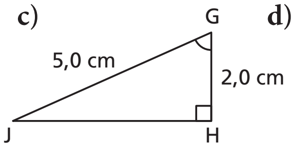
Exercices

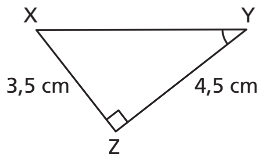
A

3. Quel rapport trigonométrique utiliserais-tu pour déterminer la mesure de l'angle indiqué dans chaque triangle ? Pourquoi ?

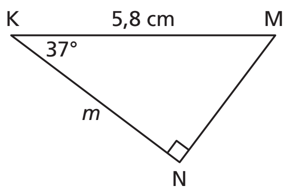
a)


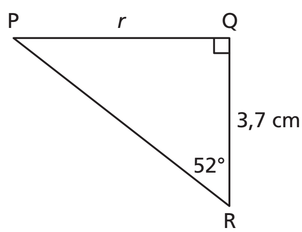
b)


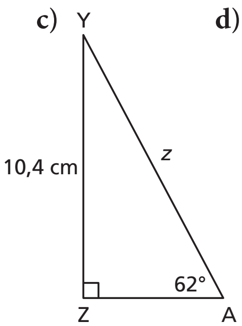
c)


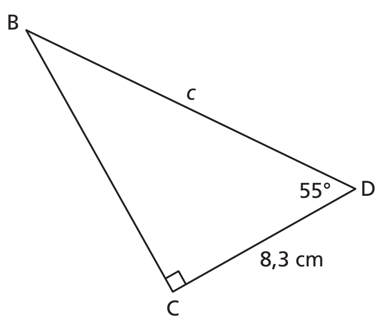
d)


4. Détermine la longueur du côté indiqué dans chaque triangle, au dixième de centimètre près. Quel rapport trigonométrique as-tu utilisé ? Pourquoi ?

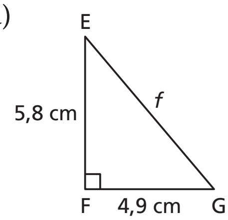
a)


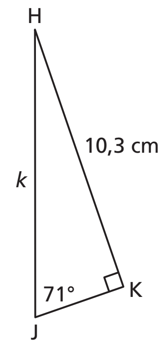
b)


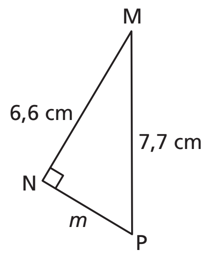
c)


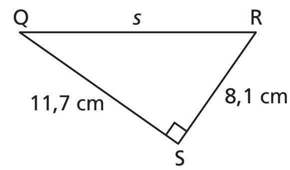
d)


5. Quelle stratégie utiliserais-tu pour déterminer la longueur du côté indiqué dans chaque triangle ? Pourquoi ?

a)


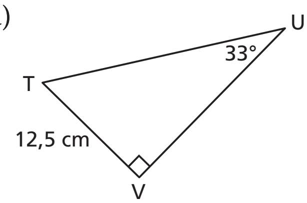
b)


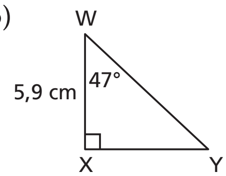
c)


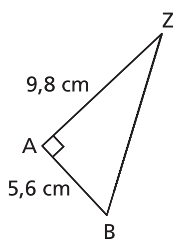
d)


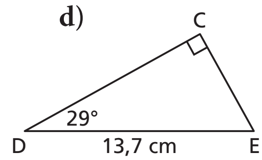
B

6. Résous chaque triangle rectangle. Indique les mesures au dixième près.

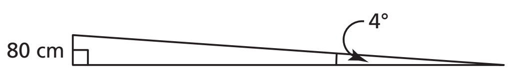
a)


b)


c)


d)


7. Un architecte a fait ce schéma d'une rampe d'accès à un édifice.



a) Détermine la longueur de la rampe d'accès.
b) Détermine la distance horizontale qu'occupera la rampe d'accès.
Indique les mesures au centimètre près.

8. Le plus grand totem du monde se trouve à Alert Bay, en Colombie-Britannique, où vit la Première nation Nimpkish. À une distance de 20 pi du pied du mât, l'angle d'élévation du sommet est de 83,4°. Quelle est la hauteur du totem, au pied près ?

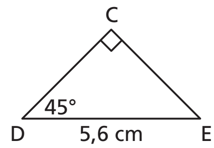
9. Un hélicoptère quitte sa base et parcourt 35 km vers l'ouest afin d'aller chercher une personne malade. Il vole ensuite vers le nord sur une distance de 58 km pour se rendre à l'hôpital.
   a) Lorsque l'hélicoptère est à l'hôpital, à quelle distance se trouve-t-il de sa base, au kilomètre près ?
   b) Lorsque l'hélicoptère est à l'hôpital, quelle est la mesure de l'angle formé par sa trajectoire vers le nord à l'arrivée et la trajectoire qu'il suivra pour rentrer directement à la base ? Indique l'angle au degré près.

10. Une route s'élève de 1 m tous les 15 m mesurés sur la route.
   a) Quel est l'angle d'inclinaison de la route, au degré près ?
   b) Quelle distance horizontale parcourt une voiture si elle se déplace de 15 m sur la route ? Indique ta réponse au dixième de mètre près.

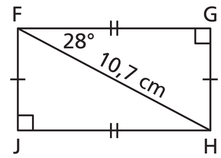
11. Un toit a la forme d'un triangle isocèle. Chaque côté congru mesure 7 m et la base mesure 12 m.
   a) Quel est l'angle d'inclinaison du toit, au degré près ?
   b) Quelle est la mesure de l'angle au sommet du toit, au degré près ?

12. Détermine le périmètre et l'aire de chaque figure. Indique les mesures au dixième près.

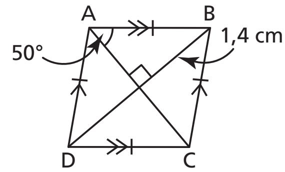
a)



b)



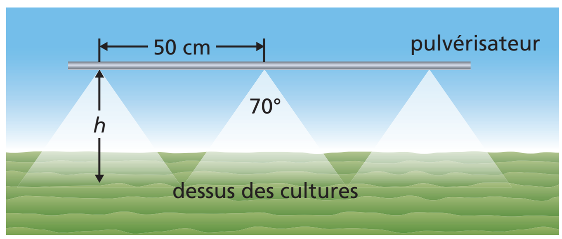
13. Détermine le périmètre de ce losange, au dixième de centimètre près.



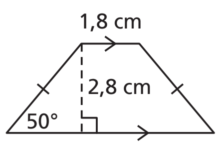
14. Une chandelle a la forme d'un prisme droit dont les bases sont des polygones réguliers à 12 côtés. Sur chaque base, la distance d'un sommet au sommet opposé, en passant par le centre de la base, est d'environ 2 po. La chandelle a une hauteur de 5 po.
   a) Quelle est l'aire de chaque base, au pouce carré près ?
   b) Quel est le volume de cire de la chandelle, au pouce cube près ?

C

15. Pour arroser ses cultures, un fermier utilise un pulvérisateur tiré par un tracteur. Les buses se trouvent à 50 cm les unes des autres et arrosent à un angle de 70°. À quelle hauteur doit-il placer le pulvérisateur pour s'assurer d'arroser toutes ses cultures, au centimètre près ?



16. Détermine le périmètre et l'aire de ce trapèze isocèle. Indique les mesures au dixième près.



Réfléchis Comment l'information que tu connais au sujet d'un triangle rectangle détermine-t-elle les étapes à suivre pour résoudre ce triangle ? Cite des exemples.

2.7 Résoudre des problèmes comportant plus d'un triangle rectangle

OBJECTIF DE LA LEÇON

Résoudre des problèmes qui comportent plus d'un triangle rectangle, à l'aide de la trigonométrie.

Établis des liens

Le Muttart Conservatory, à Edmonton, possède quatre pyramides à base carrée au climat contrôlé. Chaque pyramide correspond à une zone climatique différente. La pyramide de la zone tropicale et celle de la zone tempérée mesurent toutes deux 24 m de hauteur, et leurs bases ont 26 m de côté. Selon toi, comment les architectes ont-ils déterminé les angles des pièces de verre qui se trouvent au sommet de chaque face de la pyramide?

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille avec une ou un camarade de classe.

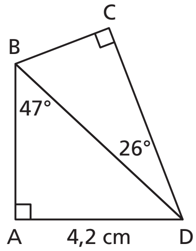
Esquisse une pyramide à base carrée.
Indique sa hauteur et la mesure des côtés de sa base, selon les indications fournies ci-dessus.
Sur ton schéma, trace des triangles rectangles qui t'aideront à déterminer l'angle formé par les arêtes de la pyramide à son sommet.

Comment peux-tu déterminer cet angle à l'aide de la trigonométrie?

Tu peux utiliser la trigonométrie pour résoudre des problèmes modélisés à partir de triangles rectangles. S'il y a plus d'un triangle rectangle, tu dois choisir le triangle que tu utiliseras pour résoudre le problème.

Exemple 1 Déterminer la longueur d'un côté à partir de plus d'un triangle

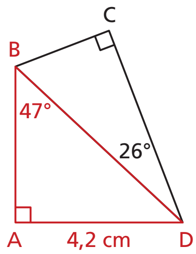
Détermine la longueur de $\overline{CD}$, au dixième de centimètre près.



SOLUTION

Il faut plus d'une étape pour déterminer la longueur de $\overline{CD}$ parce qu'on connaît seulement la mesure d'un angle du $\triangle$BCD. Alors, utilise le $\triangle$ABD pour calculer la longueur de $\overline{BD}$.

Dans le $\triangle$ABD, $\overline{AD}$ est le côté opposé à $\angle$ABD et $\overline{BD}$ est l'hypoténuse.



Utilise le sinus dans le $\triangle$ABD.

$$\sin \angle B = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \angle B = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

$$\sin 47° = \frac{4{,}2}{\overline{BD}}$$

Résous l'équation. Multiplie les deux membres de l'équation par $\overline{BD}$.

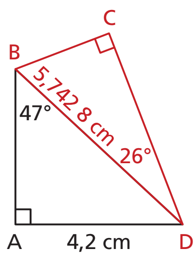
$$\overline{BD} \sin 47° = 4{,}2$$

Divise les deux membres de l'équation par sin 47°.

$$\overline{BD} = \frac{4{,}2}{\sin 47°}$$

$$\overline{BD} = 5{,}742\,7\ldots$$

Dans le $\triangle$BCD, $\overline{CD}$ est le côté adjacent à $\angle$BDC et $\overline{BD}$ est l'hypoténuse. Utilise le cosinus dans le $\triangle$BCD.



$$\cos \angle D = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \angle D = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$$

$$\cos 26° = \frac{\overline{CD}}{5{,}742\,7\ldots}$$

Résous l'équation. Multiplie les deux membres par 5,742 7...

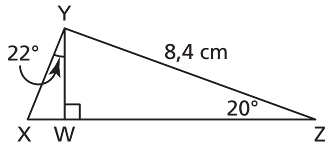
$$(5{,}742\,7\ldots)\cos 26° = \overline{CD}$$

$$\overline{CD} = 5{,}161\,5\ldots$$

$\overline{CD}$ mesure environ 5,2 cm.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Détermine la longueur de $\overline{XY}$, au dixième de centimètre près.

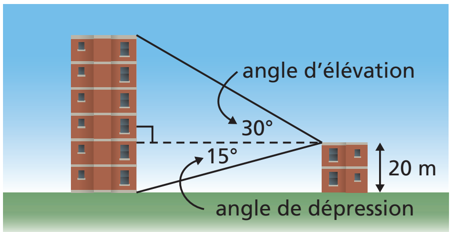


[Réponse : $\overline{XY} \approx 3{,}1$ cm]

Explique comment tu peux déterminer la longueur de tous les côtés inconnus et la mesure de tous les angles inconnus du quadrilatère ABCD.

Exemple 2 Résoudre un problème à partir de triangles dans un même plan

Depuis le toit d'un édifice de 20 m de hauteur, une arpenteuse-géomètre a mesuré l'angle d'élévation du toit d'un autre édifice ainsi que l'**angle de dépression** de la base de cet édifice. Elle a représenté ses mesures dans un schéma. Détermine la hauteur de l'édifice le plus élevé, au dixième de mètre près.



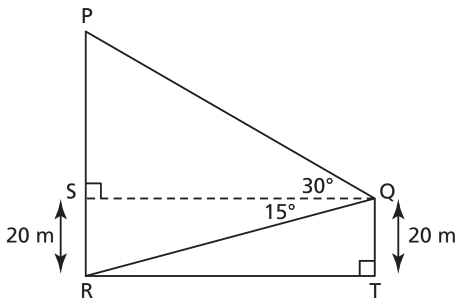
SOLUTION

Trace un schéma annoté. La hauteur de l'édifice est représentée par $\overline{PR}$.

Il faut plus d'une étape pour déterminer la longueur de $\overline{PR}$, car il ne s'agit pas d'un côté d'un triangle rectangle.

$\overline{PR} = \overline{PS} + \overline{SR}$

Dans le $\triangle PQS$, seule la mesure de $\angle PQS$ est connue. Alors, utilise le triangle rectangle QRS pour calculer la longueur de $\overline{SQ}$. QRST est un rectangle, alors $\overline{SR} = \overline{QT} = 20$ m.



Utilise la tangente dans le $\triangle QRS$.

$$\tan \angle Q = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \angle Q = \frac{\overline{SR}}{\overline{QS}}$$

$$\tan 15° = \frac{20}{\overline{QS}}$$

Résous l'équation.
Multiplie les deux membres de l'équation par $\overline{QS}$.

$$\overline{QS} \tan 15° = 20$$

Divise les deux membres de l'équation par tan 15°.

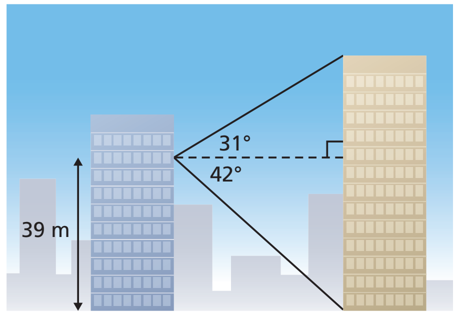
$$\overline{QS} = \frac{20}{\tan 15°}$$

$$\overline{QS} = 74{,}641\ 0\ldots$$

(Suite de la solution à la page suivante)

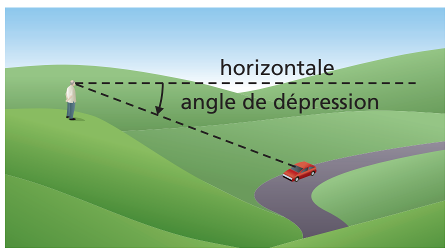
VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Un arpenteur-géomètre se tient devant une fenêtre du 9e étage d'une tour de bureaux. À l'aide d'un clinomètre, il mesure l'angle d'élévation du toit et l'angle de dépression de la base d'un édifice encore plus haut. Il représente ses mesures dans un schéma. Détermine la hauteur du plus grand édifice, au dixième de mètre près.



[Réponse : environ 65,0 m]

L'**angle de dépression** d'un objet qui se trouve sous l'horizontale est l'angle formé par l'horizontale et la ligne de vision d'un observateur.



Utilise la tangente dans le $\triangle$PQS.

$$\tan \angle Q = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \angle Q = \frac{\overline{PS}}{\overline{QS}}$$

$$\tan 30° = \frac{\overline{PS}}{76{,}641\ 0\ldots}$$

Résous l'équation.
Multiplie les deux membres de l'équation par 74,641 0…

$$(74{,}641\ 0\ldots) \tan 30° = \overline{PS}$$

$$\overline{PS} = 43{,}094\ 0\ldots$$

Alors, $\overline{PR} = \overline{PS} + \overline{SR}$

$$\overline{PR} = 43{,}094\ 0\ldots + 20$$

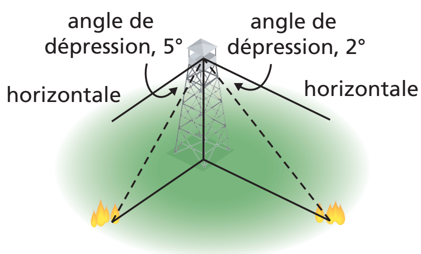
$$= 63{,}094\ 0\ldots$$

L'édifice le plus élevé mesure environ 63,1 m de hauteur.

Suppose que tu n'as pas évalué l'équivalent décimal de $\overline{QS}$. Quelle expression devrais-tu utiliser pour déterminer la longueur de $\overline{PS}$?

Parfois, les triangles rectangles à résoudre ne sont pas dans le même plan.

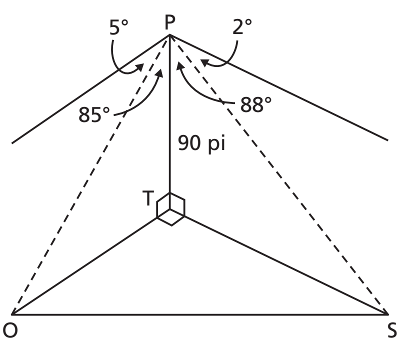
Exemple 3 Résoudre un problème à partir de triangles dans des plans différents



À partir du sommet d'une tour d'observation de 90 pi de hauteur, un pompier forestier aperçoit un feu à l'ouest de la tour, avec un angle de dépression de 5°. Il repère un autre feu au sud de la tour, avec un angle de dépression de 2°. Quelle distance sépare ces deux feux, au pied près ? Le schéma *n*'est *pas* à l'échelle.

SOLUTION

Représente les données du problème dans un schéma annoté.



Les feux se trouvent au sud et à l'ouest de la tour. Par conséquent, l'angle formé par les lignes de vision du pied de la tour jusqu'aux feux, $\overline{TO}$ et $\overline{TS}$, est de 90°.

Puisque les angles de dépression sont de 5° et de 2° respectivement, les angles formés par la tour, $\overline{PT}$, et les lignes de vision sont de 85° et de 88° respectivement.

Pour déterminer la distance $\overline{OS}$ entre les feux, détermine d'abord les distances respectives, $\overline{TO}$ et $\overline{TS}$, entre le pied de la tour et chaque feu.

Utilise la tangente dans le $\triangle PTO$.

$$\tan \angle P = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \angle P = \frac{\overline{OT}}{\overline{PT}}$$

Résous l'équation. Multiplie les deux membres de l'équation par 90.

$$\tan 85° = \frac{\overline{OT}}{90}$$

$$90 \tan 85° = \overline{OT}$$

$$\overline{OT} = 1\,028{,}704\,7\ldots$$

Utilise la tangente dans le $\triangle PTS$.

$$\tan \angle P = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \angle P = \frac{\overline{TS}}{\overline{PT}}$$

Résous l'équation. Multiplie les deux membres de l'équation par 90.

$$\tan 88° = \frac{\overline{TS}}{90}$$

$$90 \tan 88° = \overline{TS}$$

$$\overline{TS} = 2\,577{,}262\,7\ldots$$

Applique le théorème de Pythagore au $\triangle STO$.

$$\overline{SO}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{TS}^2$$

$$\overline{SO}^2 = 1\,028{,}704\,7\ldots^2 + 2\,577{,}262\,7\ldots^2$$

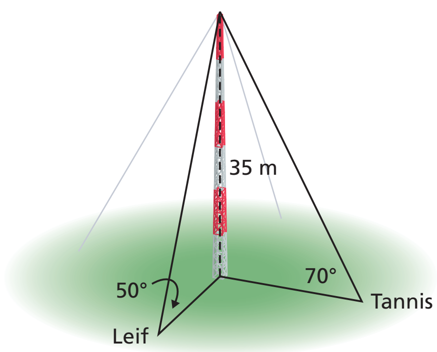
$$\overline{SO} = \sqrt{1\,028{,}704\,7\ldots^2 + 2\,577{,}262\,7\ldots^2}$$

$$= 2\,774{,}980\,5\ldots$$

La distance entre les feux est d'environ 2 775 pi.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Une tour de communication mesure 35 m de hauteur. À partir d'un point se trouvant au nord de la tour, Tannis mesure l'angle d'élévation du sommet de la tour et obtient 70°. Son frère Leif, qui se trouve à l'est de la tour, mesure aussi l'angle d'élévation du sommet de la tour et obtient 50°. Quelle distance sépare les élèves, au mètre près ? Le schéma *n*'est *pas* à l'échelle.



[Réponse : environ 32 m]

Résous l'exemple 3, mais utilise ta calculatrice une seule fois. Explique pourquoi cela peut être plus efficace et plus précis que de calculer les mesures intermédiaires.

Place à la discussion

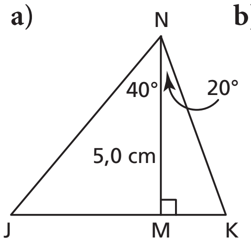
1. De quoi dois-tu tenir compte quand tu fais un schéma qui représente des triangles en trois dimensions ?
2. Comment sais-tu où commencer quand tu résous un problème qui comporte deux triangles rectangles ?

Exercices

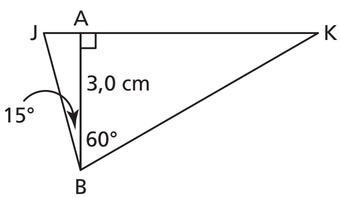
A

3. Dans chaque triangle, détermine la longueur de $\overline{JK}$ au dixième de centimètre près.

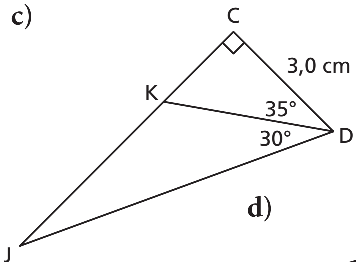
a)



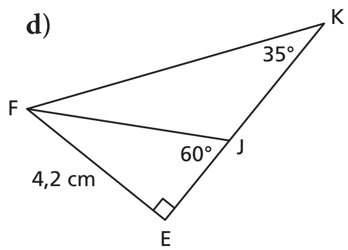
b)



c)

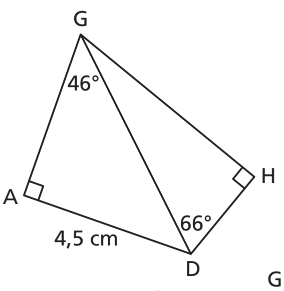


d)

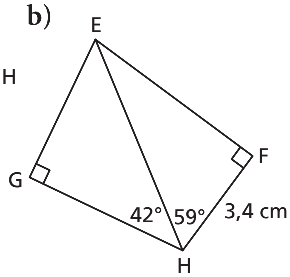


4. Dans chaque quadrilatère, détermine la longueur de $\overline{GH}$ au dixième de centimètre près.

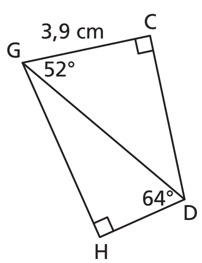
a)



b)



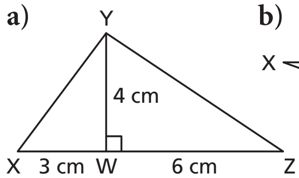
c)



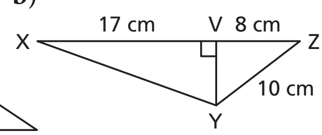
B

5. Détermine la mesure de ∠XYZ, au dixième de degré près, selon chaque schéma.

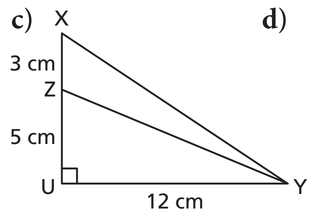
a)



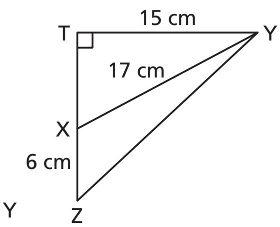
b)



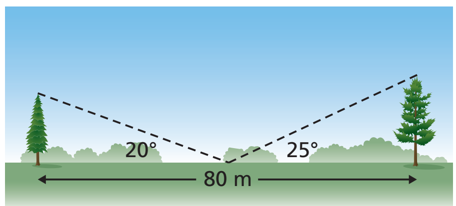
c)



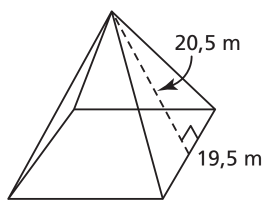
d)



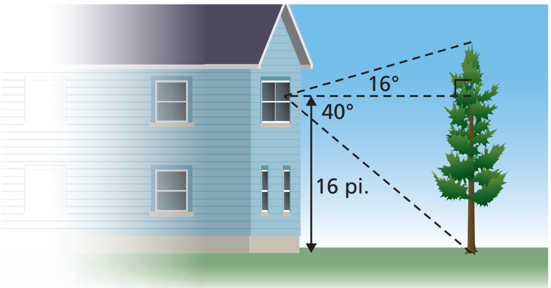
6. Une distance de 80 m sépare deux arbres. À partir d'un point situé à mi-chemin entre les deux arbres, quelqu'un mesure l'angle d'élévation du sommet de chaque arbre. Quelle est la hauteur de chaque arbre, au mètre près ?



7. Au Muttart Conservatory, la pyramide de la zone aride possède 4 faces triangulaires congruentes. La base de chaque face mesure 19,5 m de longueur et l'apothème est de 20,5 m. Quelle est la mesure de chacun des 3 angles d'une face de la pyramide ? Indique les mesures au degré près.

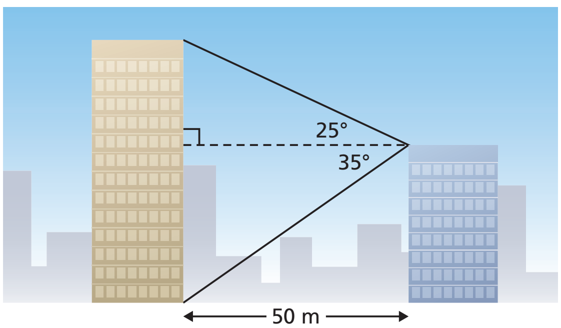


8. À partir d'une fenêtre à l'étage, une élève a mesuré l'angle d'élévation du sommet d'un arbre et l'angle de dépression de son pied. Elle sait qu'elle a pris ses mesures à 16 pi au-dessus du sol.



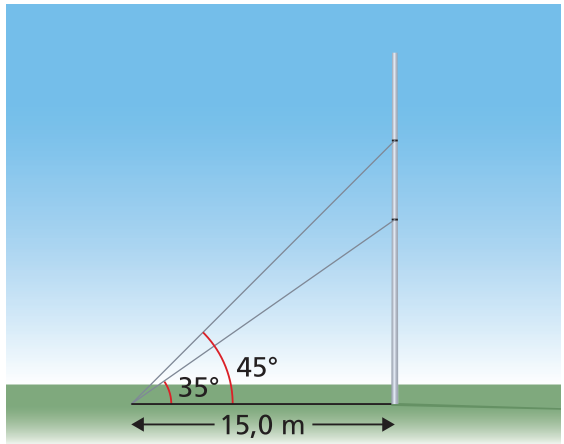
a) Quelle est la distance horizontale entre l'élève et l'arbre ?
b) Quelle est la hauteur de l'arbre ?
Indique les mesures au pied près.

9. Deux tours de bureaux se trouvent à 50 m l'une de l'autre. À partir du sommet de la plus petite tour, l'angle de dépression du pied de la plus grande tour est de 35°. L'angle d'élévation du sommet de la plus grande tour est de 25°. Détermine la hauteur de chaque tour, au mètre près.



10. Un rectangle mesure 5,5 cm sur 2,8 cm. Détermine la mesure des angles au point d'intersection des diagonales. Quelle stratégie as-tu utilisée ? Y a-t-il une autre façon de déterminer la mesure des angles ? Explique ta réponse.

11. Une élève voulait connaître la distance entre deux gravures particulières sur un poteau spirituel. Elle a mesuré l'angle d'élévation de chaque gravure à partir d'un point situé à 15 m du pied du poteau. L'élève a fait le schéma ci-dessous. Quelle est la distance entre les deux gravures, au dixième de mètre près ?

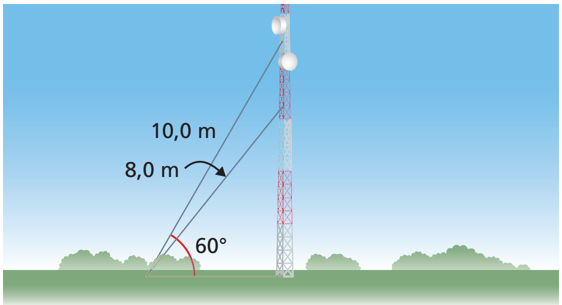


12. L'édifice de l'Assemblée législative situé dans le parc Wascana, à Regina, comporte un dôme central.

Janelle se tient au sud du dôme, à 40 m d'un point situé directement sous le dôme. Elle mesure l'angle d'élévation du sommet du dôme et obtient 53°. Troy se trouve à l'est du dôme. Il mesure l'angle d'élévation du sommet du dôme et obtient 61°.

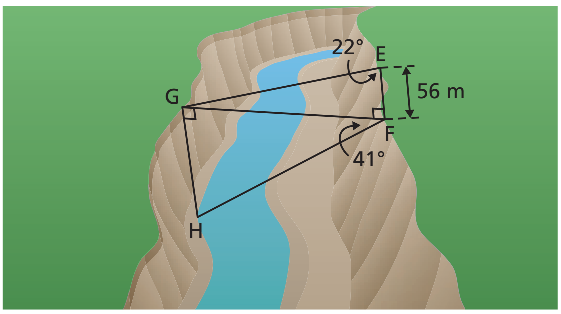
a) À quelle hauteur se trouve le sommet du dôme ?
b) À quelle distance du point situé directement sous le dôme Troy se trouve-t-il ?
c) Quelle distance y a-t-il entre Janelle et Troy ?
Indique les mesures au mètre près.

13. Une tour de communication est retenue par plusieurs câbles d'ancrage. Deux de ces câbles mesurent 10,0 m et 8,0 m de longueur respectivement. Ils sont ancrés au même point dans le sol. L'angle d'inclinaison du plus long câble est de 60°.



a) À quelle distance du pied de la tour les câbles sont-ils ancrés dans le sol ?
b) Quel est l'angle d'inclinaison du câble plus court ?
c) Quelle distance y a-t-il entre les points d'attache des câbles sur la tour ?
Indique les mesures au dixième près.

14. Un arpenteur-géomètre a fait le schéma ci-dessous pour représenter les mesures qu'il a prises dans le but de déterminer la largeur et la profondeur d'une gorge.



a) Détermine la largeur de la gorge, $\overline{GF}$.
b) Détermine la profondeur de la gorge, $\overline{GH}$.
Indique les mesures au mètre près.

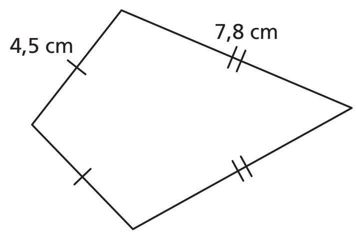
15. Une arpenteuse-géomètre veut déterminer la hauteur d'une falaise située de l'autre côté d'une rivière. Cependant, elle ne peut pas traverser la rivière. Elle dispose d'un clinomètre et d'un mètre à ruban. Explique comment elle peut déterminer la hauteur de la falaise.

16. L'horloge à vapeur de Gastown, à Vancouver, carillonne depuis 1977. À partir d'un point sur le sol, Cédric mesure l'angle d'élévation du haut de l'horloge et obtient 59,5°. Monique se trouve à 3,5 m de Cédric. Le segment de droite qui les relie forme un angle droit avec le segment de droite qui relie Cédric et le pied de l'horloge. L'angle sur le sol formé par le segment de droite de Monique à Cédric et de Monique au pied de l'horloge est de 40,6°.

a) Trace un schéma.
b) Détermine la hauteur de l'horloge, au dixième de mètre près.

C

17. La petite diagonale du cerf-volant ci-dessous mesure 6,8 cm de longueur.
a) Détermine la mesure des quatre angles du cerf-volant, au dixième de degré près.
b) Détermine la longueur de la grande diagonale, au millimètre près.

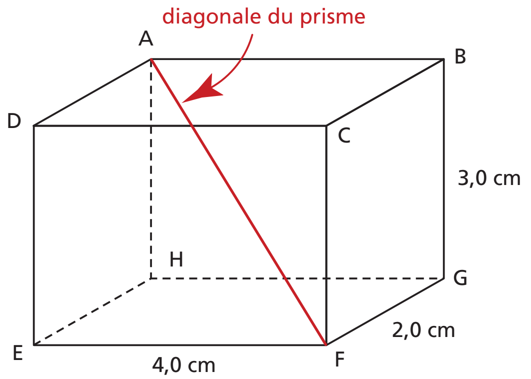


18. Au Muttart Conservatory, la pyramide de la zone tropicale possède 4 faces triangulaires congruentes. La base de chaque face mesure 27,5 m et l'apothème est de 27,2 m.
a) Trace un schéma annoté de la pyramide.
b) Quelle est la hauteur de la pyramide, au dixième de mètre près ?

19. **a)** Quelle est la longueur de la diagonale de ce prisme droit à base rectangulaire ?

b) Quelle est la mesure de ∠AFH, c'est-à-dire l'angle formé par la diagonale du prisme et la diagonale de la base du prisme ?

Indique les mesures au dixième près.



20. Une tour de communication est retenue par des câbles d'ancrage. L'un des câbles d'ancrage est fixé au sol en un point situé à 8,9 m du pied de la tour et a un angle d'inclinaison de 36°. À partir de ce point, l'angle d'élévation du sommet de la tour est de 59°. À quelle distance du sommet le câble d'ancrage est-il fixé à la tour ?

21. Un dôme géodésique consiste en plusieurs pyramides à base pentagonale boulonnées ensemble. Chaque face triangulaire d'une pyramide comporte deux jambes de force de 54 po de longueur et une autre jambe de force de 60 po de longueur. Détermine la hauteur de l'une de ces pyramides.

Réfléchis

Fais un résumé des étapes de la résolution des problèmes comportant des triangles rectangles.

L'UNIVERS DES MATHS

Un peu d'histoire

Ptolémée, mort en l'an 161 de notre ère, était mathématicien, astronome et géographe. Il a vécu à Alexandrie, en Égypte romaine, et écrivait en grec. En raison de son intérêt pour l'astronomie, il a prolongé les tables de trigonométrie d'Hipparque (190 à 120 avant notre ère) et étudié les triangles. Sa première œuvre importante, l'*Almageste,* est le seul ouvrage d'astronomie complet qui nous reste de cette époque. Ptolémée a écrit d'autres ouvrages importants : *Géographie, Harmoniques* et *Optique.*

AIDE-MÉMOIRE

RÉSUMÉ DES CONCEPTS

Concepts clés	Applications
Dans un triangle rectangle : ■ le rapport entre la longueur d'un côté et celle d'un autre côté demeure constant même si le triangle est agrandi ou réduit ;	Ce que cela signifie en pratique : ■ La grandeur du triangle n'a pas d'incidence sur la valeur des rapports trigonométriques d'un angle aigu du triangle.
■ le rapport entre la longueur d'un côté et celle d'un autre côté peut servir à déterminer la mesure de l'un des angles aigus ;	■ Si tu connais la tangente, le sinus ou le cosinus d'un angle, alors tu peux déterminer la mesure de l'angle en utilisant les fonctions réciproques — $\tan^{-1}$, $\sin^{-1}$ ou $\cos^{-1}$ — d'une calculatrice scientifique.
■ il est possible de déterminer la longueur d'un côté à partir de la longueur d'un autre côté et de la mesure de l'un des angles aigus ;	■ Tu peux écrire une équation à partir de la définition de la tangente, du sinus ou du cosinus, puis la résoudre pour déterminer la longueur inconnue.
■ les rapports trigonométriques de base peuvent servir à résoudre les problèmes modélisés par des triangles rectangles.	■ Tu peux résoudre des problèmes qui comportent plus d'un triangle rectangle en appliquant les rapports trigonométriques à un triangle à la fois.

Retour sur le chapitre

- Comment les propriétés des triangles semblables ont-elles permis d'établir la signification du sinus, du cosinus et de la tangente ?
- Lorsque tu as utilisé les rapports trigonométriques pour résoudre des problèmes, pourquoi était-il important de pouvoir représenter la situation par un schéma ?

RÉSUMÉ DES HABILETÉS

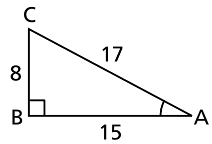
<table>
<tr><th>Habiletés</th><th>Description</th><th>Exemple</th></tr>
<tr>
<td>Calculer un rapport trigonométrique.
[2.1, 2.4]</td>
<td>

$$\tan \angle A = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\sin \angle A = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \angle A = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

</td>
<td>



$$\tan \angle A = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \angle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$$

$$\tan \angle A = \frac{8}{15}\text{, ou } 0{,}5\bar{3}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Déterminer la mesure d’un angle.
[2.1, 2.4]</td>
<td>

Pour déterminer la mesure de l’angle aigu A du triangle rectangle ABC lorsque tu connais

- la longueur de la cathète adjacente, $\overline{AB}$, et
- la longueur de l’hypoténuse, $\overline{AC}$:

1. détermine cos ∠A à partir des longueurs données ;
2. utilise la fonction $\cos^{-1}$ d’une calculatrice scientifique pour déterminer la mesure de ∠A.

</td>
<td>

Dans le △ABC ci-dessus,

$$\cos \angle A = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \angle A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\cos \angle A = \frac{15}{17}$$

$$\angle A \approx 28°$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Déterminer la longueur d’un côté.
[2.2, 2.3, 2.5]</td>
<td>

Pour déterminer la longueur de l’hypoténuse $\overline{QP}$ du triangle rectangle PQR lorsque tu connais

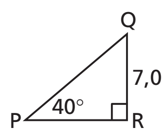
- la mesure de ∠P et
- la longueur de la cathète $\overline{QR}$:

1. identifie le rapport trigonométrique approprié, puis écris une équation ;
2. substitue les valeurs connues ;
3. résous l’équation.

Ensuite, si tu dois déterminer la longueur de la cathète $\overline{PR}$:

4. utilise un rapport trigonométrique ou applique le théorème de Pythagore.

</td>
<td>



$$\sin \angle P = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \angle P = \frac{\overline{QR}}{\overline{QP}}$$

$$\sin 40° = \frac{7}{\overline{QP}}$$

$$\overline{QP} = \frac{7}{\sin 40°}$$

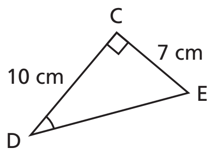
$$\overline{QP} \approx 10{,}9$$

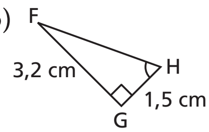
</td>
</tr>
</table>

RÉVISION

2.1

1. Détermine l'angle indiqué dans chaque triangle, au degré près.

a) 

b) 

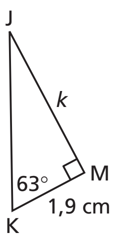
2. a) Est-ce que tan 20° est plus grand ou plus petit que 1 ?
   b) Est-ce que tan 70° est plus grand ou plus petit que 1 ?
   c) Comment peux-tu répondre aux parties a) et b) sans calculatrice ? Esquisse un triangle rectangle pour illustrer ta réponse.

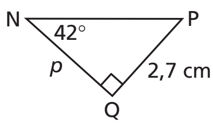
3. Une route s'élève de 15 m tous les 150 m de distance horizontale. Quel est l'angle d'inclinaison de la route, au degré près ?

4. Esquisse un triangle pour montrer que tan 45° = 1. Décris le triangle.

2.2

5. a) Détermine la longueur du côté indiqué dans chaque triangle, au dixième de centimètre près.

   I) 

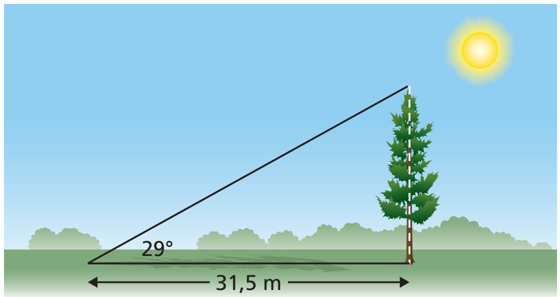
   II) 

   b) À l'aide du théorème de Pythagore, détermine l'hypoténuse de chaque triangle en a). Quelle autre stratégie aurais-tu pu utiliser pour déterminer chaque longueur ?

6. Depuis un point situé à 100 m du pied de la tour Eiffel, l'angle d'élévation du sommet de la tour est de 73°. Quelle est la hauteur de la tour Eiffel, au mètre près ?

7. Le plus petit côté d'un rectangle mesure 5,7 cm. L'angle formé par ce côté et une diagonale est de 64°.
   a) Détermine la longueur du rectangle.
   b) Détermine la longueur d'une diagonale.
   Indique les réponses au dixième de centimètre près.

8. Un arbre projette une ombre de 35,1 m de longueur lorsque les rayons du soleil et le sol forment un angle de 29°. Quelle est la taille de l'arbre, au dixième de mètre près ?



9. Aidan sait que la terrasse d'observation du Vancouver Lookout se trouve à 130 m au-dessus du sol. Il mesure l'angle entre le sol et sa ligne de vision vers la terrasse d'observation et obtient 77°. À quelle distance du pied de l'édifice Aidan se trouve-t-il, au mètre près ?

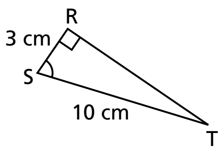
2.3

10. Utilise ton clinomètre à paille pour déterminer la hauteur du gymnase de ton école, au dixième de mètre près. Explique ta stratégie. Inclus un dessin qui indique toutes les mesures prises ou calculées.

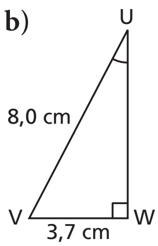
2.4

11. Détermine la mesure de l'angle indiqué dans chaque triangle, au degré près. Quel rapport trigonométrique as-tu utilisé chaque fois ? Explique pourquoi.

a)



b)



12. Fais un schéma annoté du triangle rectangle BCD où : $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{CD} = 12$ cm et $\overline{BD} = 13$ cm.

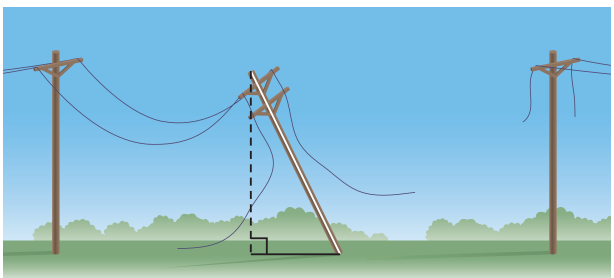
a) Quelle est la valeur de chaque rapport ?

I) sin ∠D II) sin ∠B

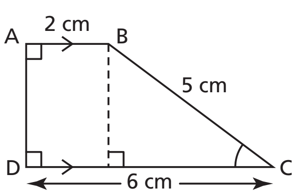
III) cos ∠B IV) cos ∠D

b) Quelle relation y a-t-il entre les rapports en a) ? Explique pourquoi cette relation existe.

13. Durant un orage, le vent a fait pencher un poteau de téléphone de 10 m de hauteur. Le sommet du poteau se trouve maintenant à 9 m au-dessus du sol. Quel est l'angle d'inclinaison du poteau, au dixième de degré près ?



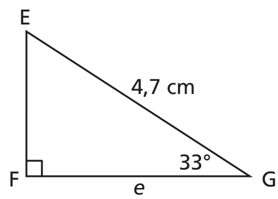
14. Détermine la mesure de ∠C dans ce trapèze. Indique ta réponse au dixième de degré près. Décris ta stratégie.



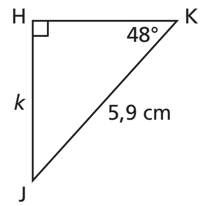
2.5

15. Détermine la longueur du côté indiqué dans chaque triangle, au dixième de centimètre près. Quel rapport trigonométrique as-tu utilisé chaque fois ? Explique pourquoi.

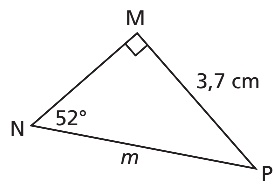
a)



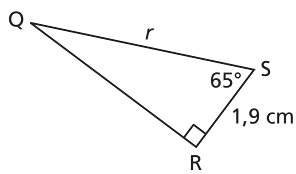
b)



c)

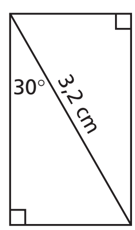


d)



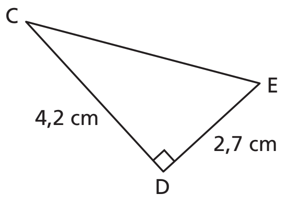
16. Un navire quitte la côte ouest de la baie d'Hudson. À un moment donné, il se trouve à 4,5 km à l'est du village d'Arviat. Le navire vogue ensuite vers le nord jusqu'à ce que l'angle formé par sa trajectoire et sa ligne de vision vers le village d'Arviat soit de 48,5°. À quelle distance d'Arviat se trouve alors le navire ? Indique ta réponse au dixième de kilomètre près.

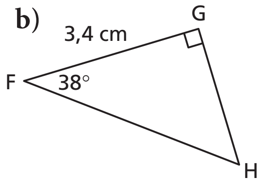
17. Détermine les dimensions de ce rectangle, au dixième de centimètre près.

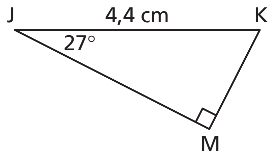


2.6

18. Résous chaque triangle rectangle. Indique les mesures au dixième près.

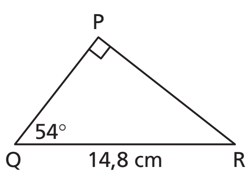
a)


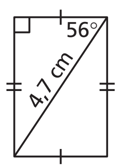
b)


c)


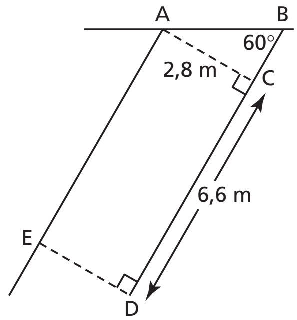
19. Le sommet de la tour de Pise, en Italie, se trouve à 13 pi de la verticale. La tour mesure 183 pi de hauteur. Quel est son angle d'inclinaison, au dixième de degré près ?

20. Détermine le périmètre et l'aire de chaque figure. Indique les mesures au dixième près.

a)


b)


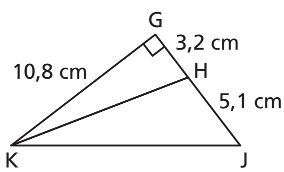
21. Des voitures sont garées en angle par rapport à la rue. Le schéma montre une place de stationnement.



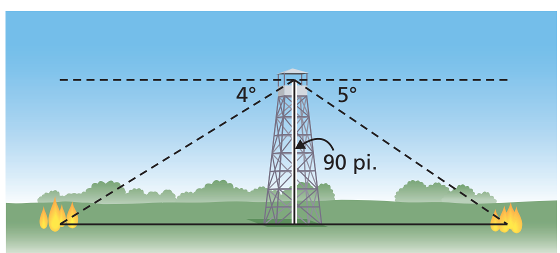
a) Quelle est la longueur de $\overline{AB}$?
b) Quelle est la longueur de $\overline{BD}$?
Indique les mesures au dixième de mètre près.

2.7

22. Détermine chaque mesure selon le schéma ci-dessous.
a) $\overline{KJ}$ **b)** $\overline{HK}$ **c)** $\angle HKJ$
Indique les mesures au dixième près.



23. Une pompière forestière se trouve au sommet d'une tour d'observation de 90 pi de hauteur. Elle aperçoit de la fumée à l'est de la tour à un angle de dépression de 5° et à l'ouest de la tour à un angle de dépression de 4°. Quelle distance sépare les feux, au pied près ? Le schéma *n*'est *pas* à l'échelle.



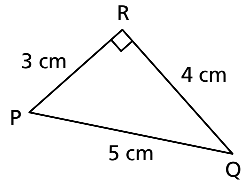
TEST PRÉPARATOIRE

Pour les questions 1 et 2, choisis la meilleure réponse : A, B, C ou D.

1. Pour le $\triangle PQR$, combien de ces énoncés sont vrais ?

$\tan \angle Q = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\sin \angle P = \frac{3}{5}$

$\sin \angle Q = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\tan \angle P = \frac{4}{3}$



A. 4 $\qquad$ **B.** 3

C. 2 $\qquad$ **D.** 1

2. Pour le $\triangle PQR$ où $\angle Q = 90°$, quel énoncé est vrai ?
À mesure que $\angle P$ augmente :

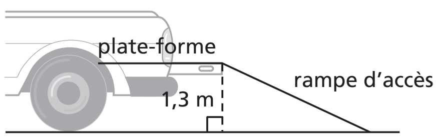
A. $\tan \angle P$ diminue. $\qquad$ **B.** $\sin \angle P$ diminue.

C. $\cos \angle P$ diminue. $\qquad$ **D.** $\cos \angle P$ augmente.

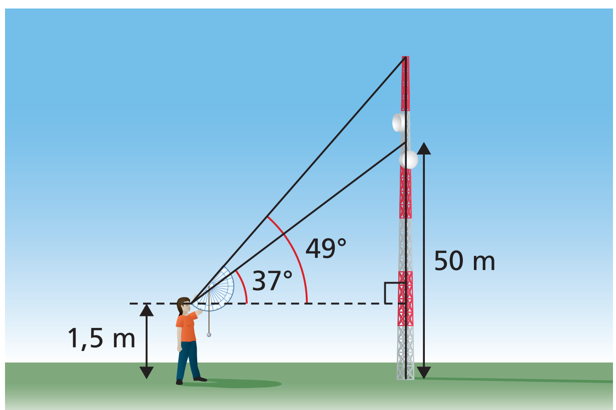
3. Le triangle ABC est semblable au $\triangle XYZ$ et $\angle A = \angle X = 90°$. À l'aide d'un schéma, explique pourquoi $\sin \angle B = \sin \angle Y$.

4. Dans le $\triangle DEF$, $\angle E = 90°$, $\angle F = 63°$ et $\overline{DF} = 7{,}8$ cm.
Résous ce triangle. Indique les mesures au dixième près.

5. Une rampe d'accès est utilisée pour charger une motoneige à l'arrière d'une camionnette. La plate-forme de la camionnette se trouve à 1,3 m au-dessus du sol. Pour des raisons de sécurité, l'angle d'inclinaison de la rampe d'accès doit être inférieur à 40°. Quelle est la plus courte longueur possible pour la rampe d'accès, au centimètre près ? Explique pourquoi.



6. À l'aide d'un clinomètre, une élève mesure l'angle d'élévation d'une affiche sur une tour à une hauteur de 50 m au-dessus du sol. L'angle d'élévation est de 37° et l'élève tient le clinomètre à 1,5 m au-dessus du sol. L'élève mesure ensuite l'angle d'élévation du sommet de la tour et obtient 49°. Détermine la hauteur de la tour, au dixième de mètre près. Le schéma *n*'est *pas* à l'échelle.



Une rampe d'accès

Les nouveaux édifices publics doivent être accessibles à tous et, s'il y a un escalier à l'entrée, il faut prévoir une rampe d'accès. Dans le cas d'édifices plus anciens, on procède souvent à l'ajout de rampes afin d'en faciliter l'accès.

PARTIE A : LA CONCEPTION

Choisis une entrée de ton école ou d'un édifice de ton quartier qui pourrait accueillir une rampe d'accès.

- Détermine la hauteur de la porte au-dessus du sol. Prends des mesures ou utilise la trigonométrie pour le faire.

Selon la plupart des codes du bâtiment, la pente d'une rampe d'accès ne doit pas excéder 1 : 12, c'est-à-dire que pour une élévation de 1 cm, la rampe doit avoir une longueur de 12 cm. Une pente de 1 : 15 ou de 1 : 20 est préférable. Une rampe doit aussi mesurer au moins 915 mm de largeur.

- Détermine la longueur minimale de la rampe d'accès requise.
- Trace un schéma de ta rampe qui indique toutes les longueurs et les mesures d'angle requises.

PARTIE B : L'ESTIMATION DES COÛTS

Une rampe peut être faite en bois ou en béton.

- Effectue une recherche puis estime le coût de la construction de ta rampe d'accès si tu la fabriques à partir de bois acheté auprès d'un commerce de ta région. Suppose que tu choisis des panneaux à copeaux orientés, des panneaux de particules ou du contreplaqué. Inclus tous les détails relatifs à la conversion des unités de mesure d'un système à l'autre.
- Effectue une recherche puis estime le coût de la construction de ta rampe si tu la fabriques en béton.

Les rampes d'accès extérieures peuvent devenir glissantes par temps humide ou froid. Il faut donc appliquer un revêtement antidérapant sur leur surface.

- Effectue une recherche puis estime ce qu'il en coûte de recouvrir la surface de ta rampe d'accès d'une peinture ou d'un autre matériel antidérapant.

LA PRÉSENTATION DU PROJET

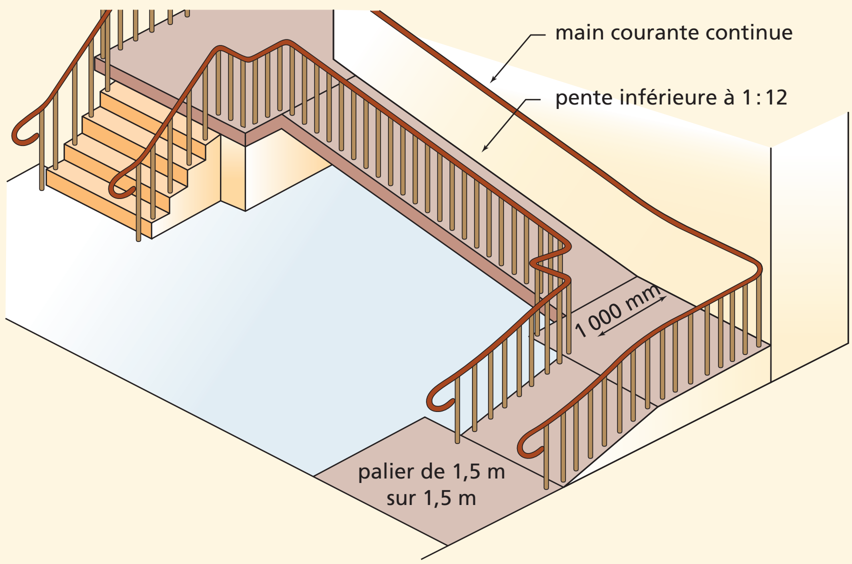
Ton travail doit inclure :

- le schéma de la rampe d'accès accompagné de calculs et d'explications relatifs à la conception ;
- les estimations de coûts pour la construction d'une rampe d'accès en bois et en béton, ainsi que tous les calculs à l'appui.

VA PLUS LOIN

Les rampes d'accès peuvent comporter des paliers ayant une aire d'au moins 1,525 m^2. Ces paliers se trouvent au début et à la fin de la rampe, mais dans le cas d'une longue rampe, il peut y en avoir un troisième au milieu. En raison des contraintes d'espace, les longues rampes peuvent changer de direction. Les rampes dont la hauteur dépasse 15 cm ou dont la distance horizontale excède 1,83 m doivent être munies d'une main courante.

- Apporte les modifications nécessaires à la conception de ta rampe d'accès afin de répondre aux exigences ci-dessus. Inclus un palier au début et à la fin. Revois aussi les coûts.



RÉVISION CUMULATIVE Chapitres 1 et 2

1

1. Andréa construit un enclos pour son chien. Le périmètre de l'enclos est de 70 pi.
   a) Quel est le périmètre de l'enclos, en verges et en pieds ?
   b) Le matériel de clôture se vend à la verge. Il coûte 2,49 $/vg. Quel est le coût du matériel de clôture, avant les taxes ?

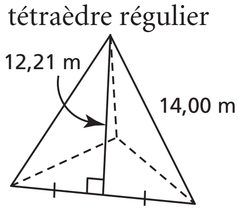
2. Une carte de l'Alberta a une échelle de 1 : 4 250 000. La distance entre Edmonton et Calgary sur la carte est de 6,5 cm. Quelle est la distance réelle entre les deux villes, au kilomètre près ?

3. Décris comment tu détermines le rayon d'un tuyau cylindrique, en unités impériales et en unités SI.

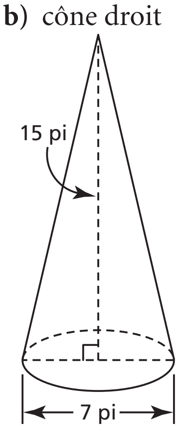
4. Convertis chaque mesure.
   a) 9 vg, au centimètre près
   b) 11 000 000 po, au mètre près
   c) 5 km, au mile près
   d) 160 cm, au pied et au pouce près

5. Sur le pont Alex Fraser à Delta, en Colombie-Britannique, la hauteur maximale de la route au-dessus de la rivière Fraser est de 154 m. Sur le pont de Tacoma, dans l'État de Washington, la hauteur maximale de la route au-dessus du détroit de Tacoma est de 510 pi. Quelle route est la plus éloignée de l'eau ? Quel est l'écart de hauteur entre les deux ponts ?

6. Détermine l'aire totale de chaque objet, à l'unité carrée près.
   a) tétraèdre régulier



   b) cône droit



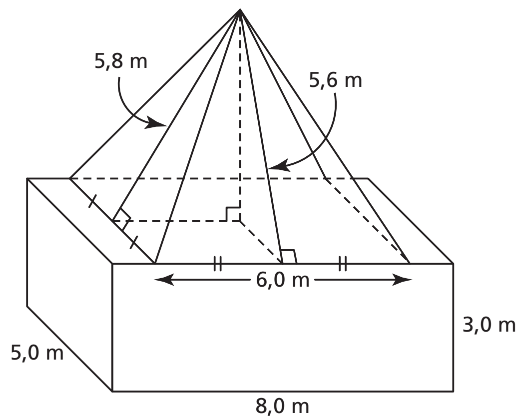
7. Détermine le volume du cône de la question 6, à l'unité cube près.

8. Le diamètre de la base d'un cône droit mesure 12 vg et le volume du cône est de 224 verges cubes. Explique comment calculer la hauteur du cône, à la verge près.

9. La hauteur d'une pyramide droite est de 8 cm et sa base carrée a 10 cm de côté. Une seconde pyramide droite a une hauteur de 13 cm et sa base carrée a 8 cm de côté. Est-ce que la pyramide qui a le plus grand volume a également la plus grande aire totale ? Justifie ta réponse.

10. Une demi-sphère a un rayon de 20 po. Une sphère a un rayon de 17 po.
    a) Quel objet a la plus grande aire totale ? Quel est l'écart entre les aires totales, au pouce carré près ?
    b) Quel objet a le plus grand volume ? Quel est l'écart entre les volumes, au pouce cube près ?

11. Cet objet composé consiste en un prisme à base rectangulaire surmonté d'une pyramide à base rectangulaire. Détermine l'aire totale et le volume de cet objet composé, à l'unité près.



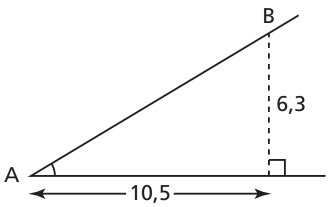
12. La hauteur d'une pyramide droite est de 40 po et sa base carrée a 48 po de côté. Détermine l'aire latérale de la pyramide, au pouce carré près.

13. La base d'une demi-sphère a une circonférence de 30,5 mm. Détermine l'aire totale et le volume de la demi-sphère, au dixième de millimètre près.

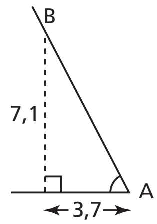
2

14. Détermine l'angle d'inclinaison de chaque demi-droite AB, au dixième de degré près.

a)



b)

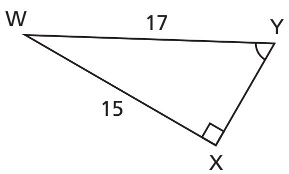


15. Barry amasse des données sur les hauteurs d'arbres. Il mesure une distance horizontale de 20 vg à partir du pied d'un arbre. À cet endroit, Barry s'étend sur le sol et mesure l'angle d'élévation du sommet de l'arbre à l'aide d'un clinomètre. Il obtient 52°. Détermine la hauteur de l'arbre, à la verge près.

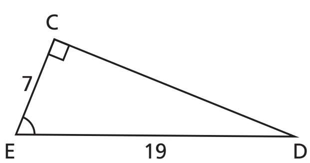
16. Jay Cochrane a marché sur une corde raide depuis le Niagara Fallsview Hotel jusqu'à la tour Skylon, à Niagara Falls. La corde avait une inclinaison vers le haut et l'angle moyen formé par la corde et l'horizontale était de 6,4°. Jay a parcouru une distance horizontale de 1 788 pi. Détermine la distance verticale qu'il a parcourue, au pied près.

17. Détermine la mesure de l'angle indiqué dans chaque triangle, au dixième de degré près.

a)



b)

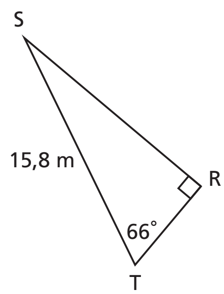


18. Une échelle de 12 pi de hauteur est appuyée contre un mur. Le pied de l'échelle est posé sur le sol à $4\frac{1}{2}$ pi du mur. Quelle est la mesure de l'angle formé par l'échelle et le mur, au degré près?

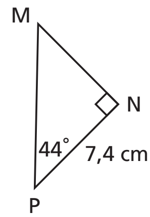
19. La diagonale d'un terrain de basketball rectangulaire mesure environ 106 pi. La diagonale et un long côté du terrain forment un angle de 28°. Détermine les dimensions du terrain de basketball, au pied près.

20. Résous chaque triangle rectangle. Écris les mesures au dixième près.

a)



b)



21. Un hélicoptère se trouve à 15 km à l'est de sa base lorsque le pilote reçoit un appel lui demandant d'aller récupérer un planchiste en détresse. La personne se trouve sur une montagne à 9 km au sud de la position actuelle de l'hélicoptère. Lorsque le pilote récupère le planchiste, quelle est la mesure de l'angle formé par la trajectoire suivie par l'hélicoptère vers le sud et celle qu'il suivra pour rentrer directement à la base? Indique l'angle au degré près.

22. Détermine la longueur des côtés indiqués et la mesure de tous les angles de ce schéma. Écris les mesures au dixième près.