3 Les facteurs et les produits

HABILETÉS ACQUISES

- déterminer les facteurs et les multiples de nombres naturels jusqu'à 100
- reconnaître des nombres premiers et des nombres composés
- déterminer la racine carrée de nombres rationnels
- additionner et soustraire des polynômes
- multiplier et diviser des polynômes par un monôme

CONCEPTS CLÉS

- Les opérations arithmétiques sur les polynômes sont basées sur les opérations arithmétiques sur les nombres entiers, et elles possèdent des propriétés semblables.
- La multiplication et la décomposition en facteurs (ou factorisation) sont des processus réciproques, et on peut les représenter à l'aide d'un schéma rectangulaire.

TERMINOLOGIE

la décomposition en facteurs premiers (factorisation première)
le plus grand facteur commun
le plus petit commun multiple
un cube parfait
une racine cubique
le radical
le radicande
l'indice du radical
la méthode de la somme et du produit
un trinôme carré parfait
une différence de carrés

UNE PHOTOGRAPHIE AÉRIENNE DU MANITOBA

Le système d'arpentage des terres du Canada divise une grande partie de l'Ouest canadien en sections de un mile carré chacune. Cette photographie montre des champs de canola aux environs du lac Shoal.

3.1 Les facteurs et les multiples de nombres naturels

OBJECTIF DE LA LEÇON

Déterminer les facteurs premiers, le plus grand facteur commun et le plus petit commun multiple de nombres naturels.

Ces ceintures, dont l'origine demeure inconnue, sont exposées au musée MacBride à Whitehorse, au Yukon.

Établis des liens

Une des ceintures ci-dessus a un motif de 12 perles de longueur et l'autre a un motif de 40 perles de longueur. Quelle longueur, en nombre de perles, une ceinture doit-elle avoir pour pouvoir comporter l'un ou l'autre de ces motifs ?

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.

A. Énumère quelques puissances de 2. Dresse une liste de puissances de 3. Choisis un nombre dans chaque liste et multiplie les nombres. Quels sont les facteurs du nombre obtenu ? Nomme quelques multiples de ce nombre.

B. Compare ton nombre avec celui de ta ou de ton camarade. Quels facteurs les deux nombres ont-ils en commun ? Quel facteur est le plus grand ?

C. Détermine quelques multiples communs aux deux nombres. Quel multiple est le plus petit ?

D. Comment peux-tu déterminer le plus grand facteur et le plus petit multiple que les nombres ont en commun à partir du produit des puissances calculé à l'étape A ?

Un facteur qui a exactement deux diviseurs, soit lui-même et 1, est un *facteur premier*. Par exemple, les facteurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Les facteurs premiers de 12 sont 2 et 3. Pour effectuer la **décomposition en facteurs premiers (factorisation première)** du nombre 12, écris 12 sous la forme du produit de ses facteurs premiers : $2 \times 2 \times 3$, ou $2^2 \times 3$.

Écrire un nombre sous la forme d'un produit de puissance de nombres premiers ($2^3 \times 3$) s'appelle aussi *décomposition en facteurs primaires* (ou factorisation primaire).

Pour éviter toute confusion entre le symbole de la multiplication et la variable x, représente la multiplication par un point : $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, ou $2^2 \cdot 3$.

Les 10 premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29. Les *nombres composés* sont les nombres naturels supérieurs à 1 qui ne sont pas des nombres premiers.

La **décomposition en facteurs premiers (factorisation première)** d'un nombre naturel strictement positif est l'écriture de ce nombre sous la forme du produit de ses facteurs premiers.

Tout nombre composé peut s'exprimer sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

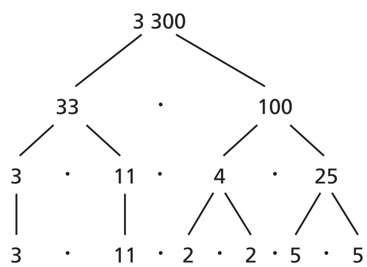
Exemple 1 Déterminer les facteurs premiers d'un nombre naturel

Décompose 3 300 en facteurs premiers.

SOLUTIONS

Méthode nº 1

Construis un arbre de facteurs.
Écris 3 300 sous la forme du produit de 2 facteurs.
Puisque 33 et 100 sont des nombres composés, tu peux les décomposer en facteurs.
Les nombres 3 et 11 sont des facteurs premiers, mais tu peux décomposer 4 et 25 en facteurs.



Les facteurs premiers de 3 300 sont 2, 3, 5 et 11. La factorisation première de 3 300 est $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$, ou $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$.

Méthode nº 2

Utilise la division répétée par des facteurs premiers.
Commence par diviser 3 300 par son plus petit facteur premier, soit 2. Divise le résultat par ce nombre premier jusqu'à ce qu'il ne soit plus un facteur. Continue en divisant chaque quotient par un facteur premier jusqu'à ce que tu obtiennes 1 comme quotient.

$3\,300 \div 2 = 1\,650$
$1\,650 \div 2 = 825$
$825 \div 3 = 275$
$275 \div 5 = 55$
$55 \div 5 = 11$
$11 \div 11 = 1$

Les facteurs premiers de 3 300 sont 2, 3, 5 et 11.

La factorisation première de 3 300 est $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$, ou $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Décompose 2 646 en facteurs premiers.

[Réponse : $2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$]

Quels autres arbres de facteurs peux-tu construire ?

Pourrait-on diviser par des facteurs premiers dans un ordre différent ? Si oui, quel ordre te semble le meilleur ? Pourquoi ?

Le **plus grand facteur commun** de deux ou plusieurs nombres est le plus grand facteur que ces nombres ont en commun.

Tu peux déterminer le **plus grand facteur commun** de deux ou plusieurs nombres naturels strictement positifs.

Exemple 2 Déterminer le plus grand facteur commun

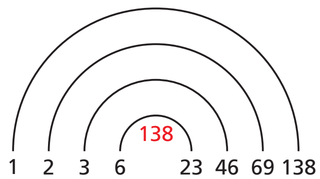
Détermine le plus grand facteur commun de 138 et de 198.

SOLUTIONS

Méthode nº 1

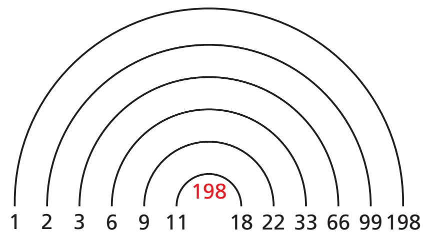
Détermine tous les facteurs de chaque nombre à l'aide de divisions. Note-les dans un diagramme en forme d'arc-en-ciel.

$138 \div 1 = 138$
$138 \div 2 = 69$
$138 \div 3 = 46$
$138 \div 6 = 23$



Puisque 23 est un nombre premier, il n'y a pas d'autre facteur de 138.

$198 \div 1 = 198$
$198 \div 2 = 99$
$198 \div 3 = 66$
$198 \div 6 = 33$
$198 \div 9 = 22$
$198 \div 11 = 18$



Il n'y a pas d'autre facteur de 198 entre 11 et 18.
Les facteurs communs de 138 et de 198 sont 1, 2, 3 et 6.
Ainsi, le plus grand facteur commun est 6.

Méthode nº 2

Vérifie si les facteurs de 138 sont aussi des facteurs de 198.
Commence par le facteur le plus grand.
Les facteurs de 138 sont 1, 2, 3, 6, 23, 46, 69 et 138.
Le nombre 198 n'est pas divisible par 138, 69, 46 ou 23.
Le nombre 198 est divisible par 6 : $198 \div 6 = 33$.
Le plus grand facteur commun est 6.

Méthode nº 3

Décompose chaque nombre en facteurs premiers. Surligne les facteurs qui apparaissent dans chaque factorisation.

$138 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 23$
$198 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 11$

Le plus grand facteur commun est $2 \cdot 3$, ce qui est égal à 6.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Détermine le plus grand facteur commun de 126 et de 144.

[Réponse : 18]

Comment déterminerais-tu le plus grand facteur commun de 3 nombres ?

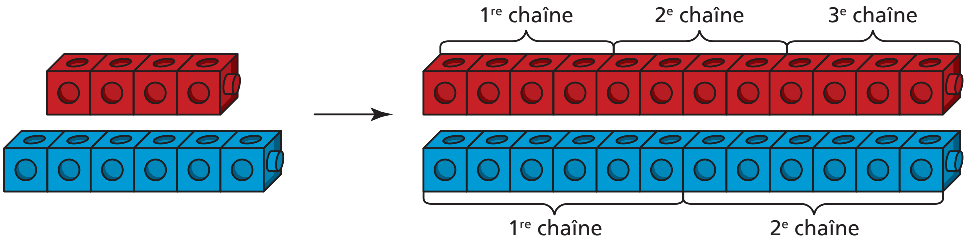
Pour générer des multiples d'un nombre, multiplie-le par les nombres naturels strictement positifs, soit 1, 2, 3, 4, 5 et ainsi de suite. Par exemple, voici quelques multiples de 26 :

$26 \cdot 1 = 26$ $\quad 26 \cdot 2 = 52$ $\quad 26 \cdot 3 = 78$ $\quad 26 \cdot 4 = 104$

On peut ainsi déterminer le **plus petit commun multiple** de deux ou plusieurs nombres naturels strictement positifs.

Le **plus petit commun multiple** de deux ou plusieurs nombres est le plus petit nombre qui est divisible par chacun des nombres.

Tu peux déterminer le plus petit commun multiple de 4 et de 6 en reliant des chaînes de cubes emboîtables identiques à chaque chaîne de départ pour obtenir deux chaînes de cubes de longueur égale.



La plus courte chaîne possible mesure 12 cubes de longueur.
Donc, le plus petit commun multiple de 4 et de 6 est 12.

Exemple 3 Déterminer le plus petit commun multiple

Détermine le plus petit commun multiple de 18, de 20 et de 30.

SOLUTIONS

Méthode nº 1

Énumère les multiples de chaque nombre jusqu'à ce que tu voies le même multiple dans chacune des trois listes.

Les multiples de 18 sont 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, **180,** …
Les multiples de 20 sont 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, **180,** …
Les multiples de 30 sont 30, 60, 90, 120, 150, **180,** …

Le plus petit commun multiple des nombres 18, 20 et 30 est 180.

Méthode nº 2

Vérifie si les multiples de 30 sont aussi des multiples de 18 et de 20.

Les multiples de 30 sont 30, 60, 90, 120, 150, 180, …

Le nombre 18 permet de diviser sans reste 90, **180,** ...
Le nombre 20 permet de diviser sans reste 60, 120, **180,** ...

Le plus petit commun multiple des nombres 18, 20 et 30 est 180.

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Détermine le plus petit commun multiple de 28, de 42 et de 63.

[Réponse : 252]

Méthode nº 3

Décompose chaque nombre en facteurs premiers.
Surligne la puissance la plus élevée de chaque facteur premier dans les trois listes.

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ ou $2 \cdot \mathbf{3^2}$
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ ou $\mathbf{2^2} \cdot 5$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot \mathbf{5}$

Dans les trois listes,
la puissance la plus élevée de 3 est 3^2,
la puissance la plus élevée de 2 est 2^2,
la puissance la plus élevée de 5 est 5.

Le plus petit commun multiple est le produit de la puissance la plus élevée de chaque facteur premier :

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$$

Le plus petit commun multiple des nombres 18, 20 et 30 est 180.

Y a-t-il des paires de nombres dont le plus petit commun multiple est égal à leur plus grand facteur commun ? Justifie ta réponse.

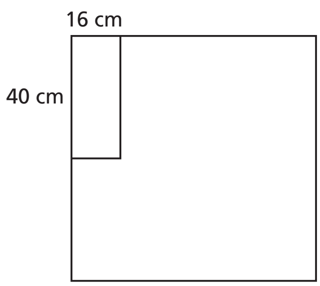
Exemple 4 Résoudre des problèmes comportant un plus grand facteur commun et un plus petit commun multiple

a) Quelle est la longueur de côté du plus petit carré que tu peux couvrir de rectangles mesurant 16 cm sur 40 cm ? Tu ne peux pas couper les rectangles. Esquisse le carré et les rectangles.

b) Quelle est la longueur de côté des plus grands carrés dont tu peux couvrir un rectangle mesurant 16 cm sur 40 cm ? Tu ne peux pas couper les carrés. Esquisse le rectangle et les carrés.

SOLUTION

a) Dans le carré, place tous les rectangles selon la même orientation.



Le côté plus court de chaque rectangle mesure 16 cm. La longueur de côté du carré doit donc être un multiple de 16.

Le côté plus long de chaque rectangle mesure 40 cm. La longueur de côté du carré doit donc être un multiple de 40.

Ainsi, la longueur de côté du carré doit être un multiple commun de 16 et de 40.

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

4. **a)** Quelle est la longueur de côté du plus petit carré que tu peux couvrir de rectangles mesurant 8 po sur 36 po ? Tu ne peux pas couper les rectangles. Esquisse le carré et les rectangles.

b) Quelle est la longueur de côté des plus grands carrés dont tu peux couvrir un rectangle mesurant 8 po sur 36 po ? Tu ne peux pas couper les carrés. Esquisse le rectangle et les carrés.

[Réponses : a) 72 po ; b) 4 po]

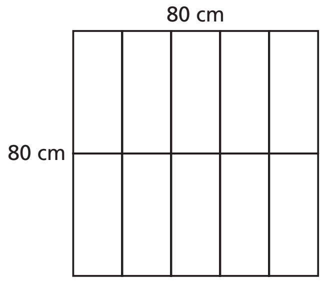
La longueur de côté du plus petit carré correspondra au plus petit commun multiple de 16 et de 40.

Écris la factorisation première de chaque nombre. Surligne la puissance la plus élevée de chaque facteur premier dans les deux listes.

$16 = \mathbf{2^4}$
$40 = 2^3 \cdot \mathbf{5}$

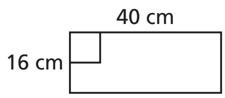
Le plus petit commun multiple est $2^4 \cdot 5 = 80$.

La longueur de côté du plus petit carré est de 80 cm.



> Dans la partie a) de l'exemple 4, obtiendrais-tu une réponse différente si tu pouvais placer les rectangles selon n'importe quelle orientation ? Justifie ta réponse.

b) Le côté plus court du rectangle mesure 16 cm. La longueur de côté des carrés doit donc être un facteur de 16.



Le côté plus long du rectangle mesure 40 cm. La longueur de côté des carrés doit donc être un facteur de 40.

Ainsi, la longueur de côté du carré doit être un facteur commun de 16 et de 40.

La longueur de côté des plus grands carrés correspondra au plus grand facteur commun de 16 et de 40.

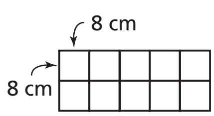
> Pourquoi est-il utile d'écrire 16 et 40 sous la forme de produits de puissances en a), et sous la forme de produits développés en b) ?

Décompose chaque nombre en facteurs premiers. Surligne les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux listes.

$16 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 2$
$40 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 5$

Le plus grand facteur commun est $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

La longueur de côté des plus grands carrés est de 8 cm.



Place à la discussion

1. Quelles stratégies peux-tu utiliser pour décomposer un nombre naturel en facteurs premiers ?
2. Comment peux-tu déterminer tous les facteurs d'un nombre à partir de sa factorisation première ?

Exercices

A

3. Énumère les 6 premiers multiples de chaque nombre.
a) 6 b) 13 c) 22
d) 31 e) 45 f) 27

4. Quels sont les facteurs premiers de chaque nombre ?
a) 40 b) 75 c) 81
d) 120 e) 140 f) 192

5. Écris chaque nombre sous la forme du produit de ses facteurs premiers.
a) 45 b) 80 c) 96
d) 122 e) 160 f) 195

B

6. Écris chaque nombre sous la forme d'un produit de puissances de ses facteurs premiers.
a) 600 b) 1 150 c) 1 022
d) 2 250 e) 4 500 f) 6 125

7. Explique pourquoi les nombres 0 et 1 n'ont aucun facteur premier.

8. Détermine le plus grand facteur commun des nombres de chaque paire.
a) 46, 84 b) 64, 120
c) 81, 216 d) 180, 224
e) 160, 672 f) 220, 860

9. Détermine le plus grand facteur commun des nombres de chaque ensemble.
a) 150, 275, 420 b) 120, 960, 1 400
c) 126, 210, 546, 714 d) 220, 308, 484, 988

10. Détermine le plus petit commun multiple des nombres de chaque paire.
a) 12, 14 b) 21, 45 c) 45, 60
d) 38, 42 e) 32, 45 f) 28, 52

11. Détermine le plus petit commun multiple des nombres de chaque ensemble.
a) 20, 36, 38 b) 15, 32, 44
c) 12, 18, 25, 30 d) 15, 20, 24, 27

12. Explique la différence qu'il y a entre déterminer le plus grand facteur commun de 12 et de 14 et déterminer leur plus petit commun multiple.

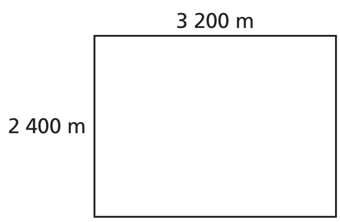
13. On doit disposer deux fanfares en matrices rectangulaires ayant le même nombre de colonnes. Une fanfare compte 42 membres, et l'autre, 36 membres. Quel est le plus grand nombre de colonnes possible ?

14. Dans quel cas le produit de deux nombres est-il égal à leur plus petit commun multiple ?

15. Comment peux-tu simplifier une fraction à l'aide du plus grand facteur commun ? Utilise cette stratégie pour simplifier chaque fraction.
a) $\frac{185}{325}$ b) $\frac{340}{380}$ c) $\frac{650}{900}$
d) $\frac{840}{1\,220}$ e) $\frac{1\,225}{2\,750}$ f) $\frac{2\,145}{1\,105}$

16. Comment peux-tu additionner, soustraire ou diviser des fractions à l'aide du plus petit commun multiple ? Utilise cette stratégie pour évaluer chaque expression.
a) $\frac{9}{14} + \frac{11}{16}$ b) $\frac{8}{15} + \frac{11}{20}$
c) $\frac{5}{24} - \frac{1}{22}$ d) $\frac{9}{10} + \frac{5}{14} + \frac{4}{21}$
e) $\frac{9}{25} + \frac{7}{15} - \frac{5}{8}$ f) $\frac{3}{5} - \frac{5}{18} + \frac{7}{3}$
g) $\frac{3}{5} \div \frac{4}{9}$ h) $\frac{11}{6} \div \frac{2}{7}$

17. Un promoteur immobilier veut subdiviser cette parcelle de terrain rectangulaire en sections carrées congruentes. Quelle est la longueur de côté du plus grand carré possible ?



18. Les nombres naturels ont-ils tous au moins un facteur premier ? Justifie ta réponse.

19. a) Quelles sont les dimensions du plus petit carré que tu peux couvrir de carreaux mesurant 18 cm sur 24 cm ? Tu ne peux pas couper les carreaux.
b) Pourrais-tu couvrir un plancher mesurant 6,48 m sur 15,12 m avec les carreaux en a) ? Justifie ta réponse.

20. Le système d'arpentage des terres du Canada divise une grande partie de l'Ouest canadien en sections et en acres (mesure impériale). Un acre de terrain correspond à un rectangle de 66 pieds sur 660 pieds.

a) Une section est un carré de 1 mile de côté. Des rectangles représentant un acre peuvent-ils couvrir exactement une section ? Justifie ta réponse. [1 mile = 5 280 pieds]

b) Un quart de section est un carré de $\frac{1}{2}$ mile de côté. Des rectangles représentant un acre peuvent-ils couvrir exactement un quart de section ? Justifie ta réponse.

c) Quelle est la longueur de côté du plus petit carré que des rectangles représentant un acre peuvent couvrir exactement ?

C

21. Marcia dit qu'elle sait que 61 est un nombre premier, car elle a essayé de diviser 61 par chaque nombre naturel strictement positif jusqu'à 7 inclusivement, et qu'aucun n'était un facteur de 61. Es-tu d'accord avec Marcia ? Justifie ta réponse.

22. Un pain de savon a la forme d'un prisme à base rectangulaire de 10 cm sur 6 cm sur 3 cm. Quelle est la longueur d'arête du plus petit cube que tu peux remplir avec ces pains de savon ?

Réfléchis

Décris les stratégies que tu peux utiliser pour déterminer le plus petit commun multiple et le plus grand facteur commun des nombres d'un ensemble.

L'UNIVERS DES MATHS

Fait insolite : La cryptographie

La cryptographie est l'art de chiffrer ou de déchiffrer des messages. Les cryptographes chiffrent et déchiffrent les messages à l'aide d'une clé de chiffrement. Une façon de générer une clé consiste à multiplier deux grands nombres premiers. Il est ainsi presque impossible de déchiffrer le code sans connaître les nombres multipliés au départ pour chiffrer le message.

En 2006, des mathématiciens ont annoncé qu'ils avaient décomposé un nombre à 274 chiffres sous la forme du produit d'un nombre premier à 120 chiffres et d'un nombre premier à 155 chiffres.

$c274 = \frac{6^{353} - 1}{5}$

= 97369150518441644256595898307653103810177469944544603444246767340397014508494246629846529469418789179481605188614420406622642320616708178468189806366368550930451357370697905234613513066631782316112426015305016493126531936168796095782387899804748567878742876359165699195666643

= p120 x p155

= 135095261330112651830775049635590807381121031111382732318390846759744072165636542920143351738198057636666351316191686483 x 72074438111130193764393586402902539161389086709970781704984956627178573407484509481161087627373286704178679466051451768242073072242783688661390273684623521

3.2 Les carrés parfaits, les cubes parfaits et leurs racines

OBJECTIF DE LA LEÇON

Reconnaître des carrés parfaits et des cubes parfaits, et déterminer des racines carrées et des racines cubiques.

Voici une des structures temporaires Kubik construites à Barcelone, à Berlin et à Lisbonne en 2007.

Établis des liens

La longueur d'arête du cube de Rubik est de trois unités.

Quelle est l'aire d'une face du cube ? Pourquoi ce nombre est-il un *carré parfait ?*

Quel est le volume du cube ? Ce nombre est un **cube parfait.**
À ton avis, pourquoi porte-t-il ce nom ?

Des compétiteurs s'efforcent de résoudre un cube de Rubik lors du championnat du monde tenu à Budapest, en Hongrie, en octobre 2007.

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec des camarades.

Tu as besoin de 100 carreaux congruents de forme carrée, de 100 cubes emboîtables, de papier quadrillé et de papier à points isométrique.

A. Représente tous les carrés parfaits de 1 à 100 à l'aide de carreaux. Esquisse chaque représentation sur du papier quadrillé et indique le carré parfait correspondant.

B. Représente tous les cubes parfaits de 1 à 100 à l'aide de cubes emboîtables. Esquisse chaque représentation sur du papier à points isométrique et indique le cube parfait correspondant.

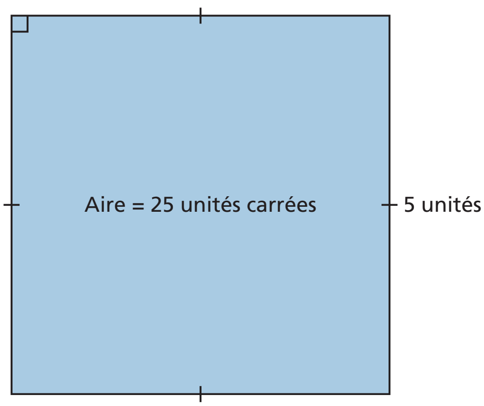
C. Parmi les nombres de 1 à 100, lesquels sont des carrés parfaits ? Lesquels sont des cubes parfaits ?

D. Avec tes camarades, joins-toi à un autre groupe. À tour de rôle, choisissez un nombre entre 101 et 200. Ensemble, déterminez si le nombre est un carré parfait, un cube parfait ou ni l'un ni l'autre.

E. Suppose que tu n'as ni carreaux ni cubes. Comment peux-tu déterminer si un nombre donné est un carré parfait ? Comment peux-tu déterminer si un nombre donné est un cube parfait ?

Un nombre naturel que tu peux représenter par l'aire d'un carré dont la longueur de côté est un nombre naturel est un *carré parfait.* La longueur de côté du carré est la *racine carrée* de l'aire du carré.

La *racine carrée* d'un nombre n, notée $\sqrt{n}$, est un nombre positif dont le carré est n.



Écris : $\sqrt{25} = 5$

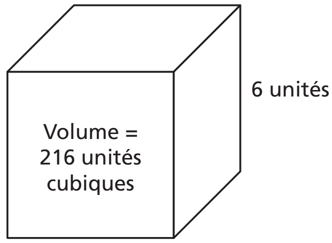
Le nombre 25 est un carré parfait, et 5 est sa racine carrée.

La **racine cubique** d'un nombre *n*, notée $\sqrt[3]{n}$, est un nombre dont le cube est *n*.

Un nombre naturel que tu peux représenter par le volume d'un cube dont la longueur d'arête est un nombre naturel est un **cube parfait.**
La longueur d'arête du cube est la **racine cubique** du volume du cube.

Écris : $\sqrt[3]{216} = 6$

Le nombre 216 est un cube parfait, et le nombre 6 est sa racine cubique.



Exemple 1 Déterminer la racine carrée d'un nombre naturel

Détermine la racine carrée de 1 296.

SOLUTIONS

Méthode nº 1

Écris 1 296 sous la forme du produit de ses facteurs premiers.

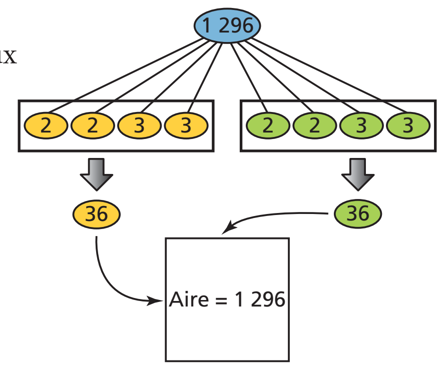
$$\begin{aligned} 1\,296 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= (2 \cdot 2)(2 \cdot 2)(3 \cdot 3)(3 \cdot 3) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3) \\ &= 36 \cdot 36 \end{aligned}$$

Regroupe les facteurs par paires.

Réécris les facteurs en 2 groupes égaux.

Puisque 1 296 est le produit de deux facteurs égaux, tu peux le représenter par l'aire d'un carré.

La racine carrée de 1 296 est donc 36.



Méthode nº 2

Fais une estimation :
$30^2 = 900$ et $40^2 = 1\,600$

$900 < 1\,296 < 1\,600$
Par conséquent, $30 < \sqrt{1\,296} < 40$

Le nombre 1 296 est environ à mi-chemin entre 900 et 1 600.
Donc, $\sqrt{1\,296}$ est environ à mi-chemin entre 30 et 40.
Précise ton estimation à l'aide de la stratégie Prédire et vérifier.
Essaie 35 : $35^2 = 1\,225$ (trop petit, mais proche)
Essaie 36 : $36^2 = 1\,296$

La racine carrée de 1 296 est donc 36.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Détermine la racine carrée de 1 764.

[Réponse : 42]

Qu'arrive-t-il si tu ne peux pas regrouper les facteurs premiers d'un nombre par paires ? Que peux-tu dire à propos d'un tel nombre ?

Exemple 2 Déterminer la racine cubique d'un nombre naturel

Détermine la racine cubique de 1 728.

SOLUTIONS

Méthode nº 1

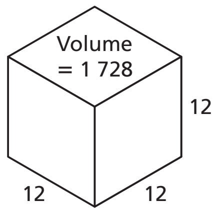
Écris 1 728 sous la forme du produit de ses facteurs premiers.

$$\begin{aligned} 1\,728 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2)(3 \cdot 3 \cdot 3) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 3)(2 \cdot 2 \cdot 3)(2 \cdot 2 \cdot 3) \\ &= 12 \cdot 12 \cdot 12 \end{aligned}$$

Regroupe les facteurs par ensembles de 3.

Réécris les facteurs en 3 groupes égaux.

Puisque 1 728 est le produit de trois facteurs égaux, tu peux le représenter par le volume d'un cube.



La racine cubique de 1 728 est donc 12.

Méthode nº 2

Fais une estimation:
$10^3 = 1\,000$ et $20^3 = 8\,000$

$1\,000 < 1\,728 < 8\,000$

Par conséquent, $10 < \sqrt[3]{1\,728} < 20$

Le nombre 1 728 est plus proche de 1 000 que de 8 000.

Alors, $\sqrt[3]{1\,728}$ est plus proche de 10 que de 20.

Précise ton estimation à l'aide de la stratégie Prédire et vérifier.
Essaie 11: $11^3 = 1\,331$ (trop petit, mais proche)
Essaie 12: $12^3 = 1\,728$

La racine cubique de 1 728 est donc 12.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

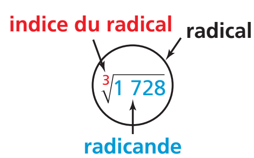
2. Détermine la racine cubique de 2 744.

[Réponse: 14]

Comment peux-tu montrer qu'un nombre n'est pas un cube parfait à l'aide de cette stratégie?

Un nombre naturel peut-il être à la fois un carré parfait et un cube parfait? Justifie ta réponse.

Dans l'exemple 1, $\sqrt{1\,296}$ est un radical dont le radicande est 1 296. Il est possible d'écrire cette racine carrée sous la forme $\sqrt[2]{1\,296}$, c'est-à-dire avec l'indice 2. Toutefois, l'indice du radical d'une racine carrée est implicite et est rarement écrit.



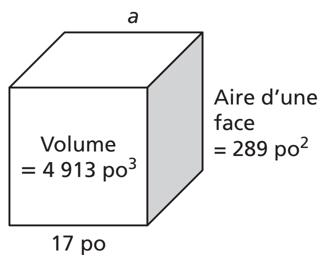
Exemple 3 Résoudre un problème à l'aide des racines

Un cube a un volume de 4 913 pouces cubes. Quelle est l'aire totale de ce cube ?

SOLUTION

Trace un schéma.

Pour calculer l'aire totale, commence par déterminer la longueur d'arête du cube.



La longueur d'arête, a, d'un cube est égale à la racine cubique de son volume.

$a = \sqrt[3]{4\,913}$
$a = 17$

L'aire totale, A_t, d'un cube est la somme des aires de ses 6 faces carrées congruentes.
$A_t = 6(17 \cdot 17)$
$A_t = 6(289)$
$A_t = 1\,734$

L'aire totale du cube est de 1 734 pouces carrés.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Un cube a un volume de 12 167 pieds cubes. Quelle est l'aire totale de ce cube ?

[Réponse : 3 174 pieds carrés]

Place à la discussion

1. Quelles stratégies pourrais-tu utiliser pour déterminer si un nombre est un carré parfait ou un cube parfait ?

2. Quelle stratégie pourrais-tu utiliser pour déterminer qu'un nombre n'est pas un carré parfait ? Pour déterminer qu'il n'est pas un cube parfait ?

3. Quelles stratégies peux-tu utiliser pour déterminer la racine carrée d'un carré parfait ?
Quelles stratégies peux-tu utiliser pour déterminer la racine cubique d'un cube parfait ?

Exercices

A

4. Détermine la racine carrée de chaque nombre. Explique ce que tu as fait.
a) 196 **b)** 256 **c)** 361 **d)** 289 **e)** 441

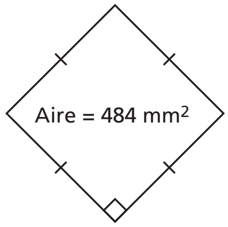
5. Détermine la racine cubique de chaque nombre. Explique ce que tu as fait.
a) 343 **b)** 512 **c)** 1 000 **d)** 1 331 **e)** 3 375

B

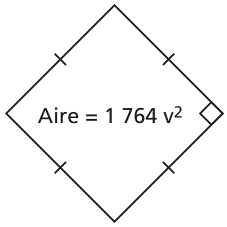
6. À l'aide de la décomposition en facteurs, détermine si chaque nombre est un carré parfait, un cube parfait, ou ni l'un ni l'autre.
a) 225 **b)** 729 **c)** 1 944
d) 1 444 **e)** 4 096 **f)** 13 824

7. Détermine la longueur de côté de chaque carré.

a)

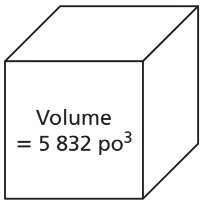


b)

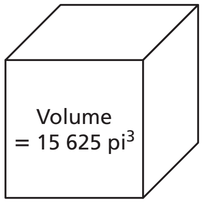


8. Détermine la longueur d'arête de chaque cube.

a)



b)



9. En février 2003, la Chambre de commerce de Battlefords, en Saskatchewan, a installé une cage contenant un cube de glace de 64 pieds cubes le long de l'autoroute Yellowhead. Elle a invité la clientèle locale à prédire à quel moment le cube de glace aurait suffisamment fondu pour qu'une balle placée sur le cube passe à travers. Quelle était l'aire totale du cube de glace ?

10. Un cube a une aire totale de 6 534 pieds carrés. Quel est son volume ?

11. Est-il possible de construire un cube fait de 2 000 cubes emboîtables ? Justifie ta réponse.

12. Détermine tous les carrés parfaits et tous les cubes parfaits qui sont des nombres naturels compris entre les nombres de chaque paire.

a) 315 et 390 **b)** 650 et 750

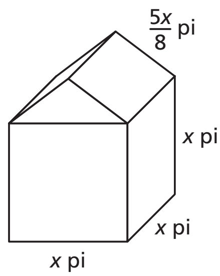
c) 800 et 925 **d)** 1 200 et 1 350

13. Écris 3 nombres qui sont à la fois des carrés parfaits et des cubes parfaits.

14. Pendant le Festival du Voyageur à Winnipeg, au Manitoba, des équipes participent à une compétition de sculpture sur neige. Chaque équipe dispose d'un prisme à base rectangulaire de 1 440 pieds cubes de neige. Ce prisme droit a une coupe transversale carrée et une hauteur de 10 pi. Détermine sa longueur et sa largeur.

C

15. a) Écris une expression qui représente l'aire totale de cette tente, sans le plancher.



b) Suppose que l'aire totale de la tente est de 90 pieds carrés. Calcule la valeur de x.

16. Détermine les dimensions d'un cube dont l'aire totale est représentée par le même nombre que son volume.

17. a) Détermine la longueur de côté d'un carré dont l'aire est de $121x^4y^2$.

b) Détermine la longueur d'arête d'un cube dont le volume est de $64x^6y^3$.

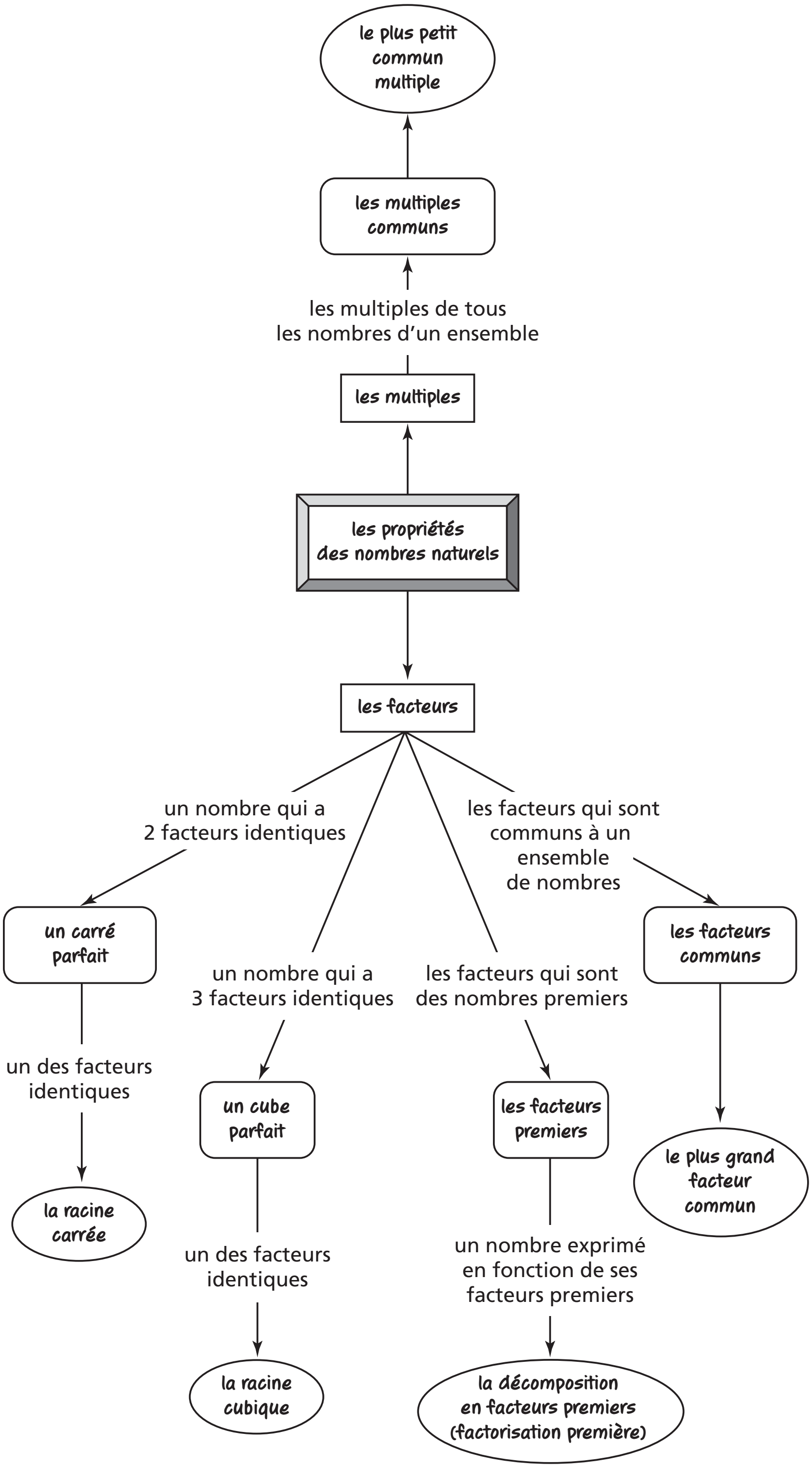
18. Quelles paires de cubes parfaits ont une somme de 1 729 ?

Réfléchis

Quelles ressemblances y a-t-il entre déterminer la racine carrée d'un nombre et déterminer sa racine cubique ? Quelles différences y a-t-il ?

PAUSE VÉRIFICATION 1

Liens



Présentation des concepts

- **Dans la leçon 3.1 :**
  - tu as déterminé des **facteurs premiers** à l'aide des propriétés et des opérations relatives aux nombres naturels ;
  - tu as déterminé le **plus grand facteur commun** (PGFC) et le **plus petit commun multiple** (**PPCM**) de nombres à partir de facteurs premiers.
- **Dans la leçon 3.2 :**
  - tu as déterminé des **nombres naturels qui sont des carrés parfaits** et leurs **racines carrées** à partir de facteurs et de multiples ;
  - tu as déterminé des **nombres naturels qui sont des cubes parfaits** et leurs **racines cubiques** à partir de facteurs et de multiples.

Évalue ta compréhension

3.1

1. Écris chaque nombre sous la forme d'un produit de puissances de ses facteurs premiers.

a) 1 260 **b)** 4 224 **c)** 6 120
d) 1 045 **e)** 3 024 **f)** 3 675

2. Détermine le plus grand facteur commun des nombres de chaque ensemble.

a) 40, 48, 56 **b)** 84, 120, 144 **c)** 145, 205, 320
d) 208, 368, 528 **e)** 856, 1 200, 1 368 **f)** 950, 1 225, 1 550

3. Détermine le plus petit commun multiple des nombres de chaque ensemble.

a) 12, 15, 21 **b)** 12, 20, 32 **c)** 18, 24, 30
d) 30, 32, 40 **e)** 49, 56, 64 **f)** 50, 55, 66

4. Détermine chaque réponse à l'aide du plus petit commun multiple.

a) $\frac{8}{3} + \frac{5}{11}$ **b)** $\frac{13}{5} - \frac{4}{7}$ **c)** $\frac{9}{10} \div \frac{7}{3}$

5. Les Mayas utilisaient différents calendriers; l'un se basait sur un cycle de 365 jours et un autre se basait sur un cycle de 260 jours. Suppose que ces deux calendriers commençaient le même jour. Après combien de jours pouvaient-ils commencer de nouveau le même jour? Environ combien d'années cela représente-t-il? Suppose qu'il y a 365 jours dans une année.

3.2

6. Détermine la racine carrée de chaque nombre. Quelles stratégies peux-tu utiliser?

a) 400 **b)** 784 **c)** 576
d) 1 089 **e)** 1 521 **f)** 3 025

7. Détermine la racine cubique de chaque nombre. Quelles stratégies peux-tu utiliser?

a) 1 728 **b)** 3 375 **c)** 8 000
d) 5 832 **e)** 10 648 **f)** 9 261

8. Détermine si chaque nombre est un carré parfait, un cube parfait, ou ni l'un ni l'autre.

a) 2 808 **b)** 3 136 **c)** 4 096
d) 4 624 **e)** 5 832 **f)** 9 270

9. Détermine tous les carrés parfaits et tous les cubes parfaits qui sont des nombres naturels compris entre les nombres de chaque paire.

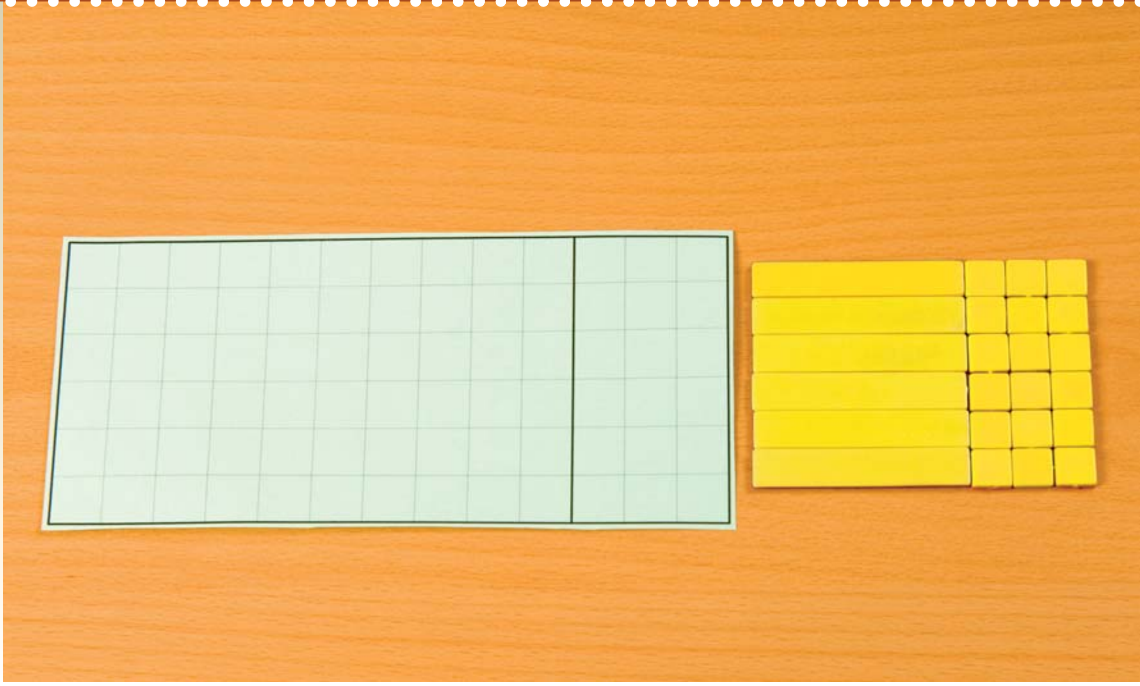
a) 400 et 500 **b)** 900 et 1 000 **c)** 1 100 et 1 175

10. Un cube a un volume de 2 197 m^3. Il faut peinturer sa surface. Chaque contenant de peinture couvre environ 40 m^2. Combien de contenants de peinture faudra-t-il? Justifie ta réponse.

3.3 Les facteurs communs d'un polynôme

OBJECTIF DE LA LEÇON

Représenter et écrire la décomposition en facteurs d'un polynôme.



Établis des liens

Tu peux représenter des produits à l'aide de schémas et de modèles.

Quelles sont les multiplications représentées ci-dessus ?

Quelle propriété les modèles illustrent-ils ?

Développe ta compréhension

Le carreau de variable, souvent appelé « carreau *x* », peut représenter n'importe quelle variable.

QU'EN PENSES-TU ?

Tu peux utiliser des carreaux algébriques.

Esquisse toutes les façons dont tu peux placer ces carreaux pour former un rectangle.

À côté de chaque esquisse, écris la multiplication qu'elle représente.

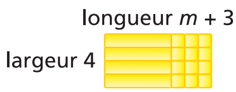
Chaque ensemble de carreaux ci-dessous représente le polynôme $4m + 12$.

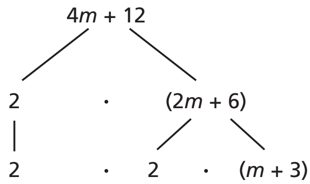
Les dimensions de chaque rectangle représentent les *facteurs* du polynôme.

- $1(4m + 12) = 4m + 12$

- $2(2m + 6) = 4m + 12$

- $4(m + 3) = 4m + 12$





Quand tu écris un polynôme sous la forme d'un produit de facteurs, tu le *décomposes en facteurs.*

Les schémas ci-dessus montrent qu'il y a 3 façons de décomposer l'expression $4m + 12$ en facteurs.

Les deux premières façons, $4m + 12 = 1(4m + 12)$ et $4m + 12 = 2(2m + 6)$, sont incomplètes. En effet, dans chaque cas, il est encore possible de décomposer le deuxième facteur. Autrement dit, 1 et 2 ne sont ni l'un ni l'autre le plus grand facteur commun de $4m$ et de 12.

La troisième façon, $4m + 12 = 4(m + 3)$, est complète. Le plus grand facteur commun de $4m$ et de 12 est 4.

Quand tu écris $4m + 12 = 4(m + 3)$, l'expression $4m + 12$ est **complètement décomposée,** c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de la décomposer davantage.

Compare la multiplication et la décomposition en facteurs en arithmétique et en algèbre.

En arithmétique	En algèbre
Tu *multiplies* des facteurs pour obtenir un produit. $(4)(7) = 28$	Tu *développes* une expression pour obtenir un produit. $3(2 - 5a) = 6 - 15a$
Tu *décomposes* un nombre *en facteurs* en l'écrivant sous la forme d'un produit de facteurs. $28 = (4)(7)$	Tu *décomposes* un polynôme *en facteurs* en l'écrivant sous la forme d'un produit de facteurs. $6 - 15a = 3(2 - 5a)$

La décomposition en facteurs et le développement sont des processus réciproques.

Exemple 1 Décomposer des binômes en facteurs à l'aide de carreaux algébriques

Décompose chaque binôme en facteurs.

a) $6n + 9$ **b)** $6c + 4c^2$

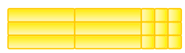
SOLUTIONS

a) $6n + 9$

Méthode nº 1

Forme un rectangle avec des carreaux algébriques.

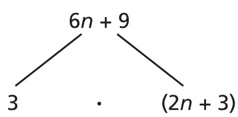
Les dimensions du rectangle sont 3 et $2n + 3$.
Ainsi, $6n + 9 = 3(2n + 3)$



Méthode nº 2

Construis un arbre de facteurs.

$6n + 9 = 3(2n + 3)$

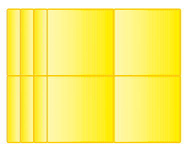


b) $6c + 4c^2$

Méthode nº 1

Utilise des carreaux algébriques.

$6c + 4c^2 = 2c(3 + 2c)$



Méthode nº 2

Utilise le plus grand facteur commun.
Décompose chaque terme du binôme en facteurs.

$6c = 2 \cdot 3 \cdot c$

$4c^2 = 2 \cdot 2 \cdot c \cdot c$

Le plus grand facteur commun est $2c$.

Écris chaque terme sous la forme du produit de $2c$ et d'un autre monôme.

$6c + 4c^2 = 2c(3) + 2c(2c)$

Écris la somme sous la forme d'un produit à l'aide de la distributivité.

$6c + 4c^2 = 2c(3 + 2c)$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Décompose chaque binôme en facteurs.

a) $3g + 6$ **b)** $8d + 12d^2$

[Réponses : a) $3(g + 2)$; b) $4d(2 + 3d)$]

Comment peux-tu vérifier si ta réponse est exacte ?

Quand un polynôme comporte des termes négatifs ou 3 termes différents, il n'est pas possible de mettre en évidence un facteur commun en formant un rectangle avec les carreaux. En revanche, il est parfois possible de disposer les carreaux en groupes égaux.

Exemple 2 Décomposer des trinômes en facteurs

Décompose le trinôme $5 - 10z - 5z^2$ en facteurs.

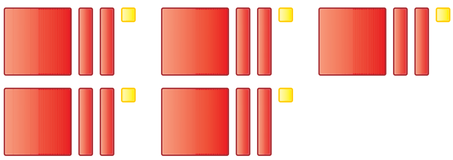
Vérifie tes facteurs.

SOLUTIONS

$5 - 10z - 5z^2$

Méthode nº 1

Utilise des carreaux algébriques. Dispose 5 carreaux unitaires, 10 carreaux z négatifs et 5 carreaux z^2 négatifs en groupes égaux.



Il y a 5 groupes égaux et chaque groupe contient le trinôme $1 - 2z - z^2$.
Les facteurs sont donc 5 et $1 - 2z - z^2$.

$5 - 10z - 5z^2 = 5(1 - 2z - z^2)$

Méthode nº 2

Utilise le plus grand facteur commun.
Décompose chaque terme du trinôme en facteurs.

$5 = 5$

$-10z = -1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot z$

$-5z^2 = -1 \cdot 5 \cdot z \cdot z$

Le plus grand facteur commun est 5. Écris chaque terme sous la forme du produit du plus grand facteur commun et d'un autre monôme.

$5 - 10z - 5z^2 = 5(1) + 5(-2z) + 5(-z^2)$

Écris l'expression sous la forme d'un produit à l'aide de la distributivité.

$5 - 10z - 5z^2 = 5(1 - 2z - z^2)$

Vérifie : Développe $5(1 - 2z - z^2) = 5(1) + 5(-2z) + 5(-z^2)$

$$= 5 - 10z - 5z^2$$

Tu obtiens le trinôme de départ, alors les facteurs sont exacts.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Décompose le trinôme
$6 - 12z + 18z^2$
en facteurs.
Vérifie les facteurs.

[Réponse : $6(1 - 2z + 3z^2)$]

Lorsque tu as décomposé une expression en facteurs, pourquoi devrais-tu toujours appliquer la distributivité pour développer le produit ?

Quand il n'est pas pratique de se servir de carreaux algébriques, utilise la stratégie du plus grand facteur commun.

Exemple 3 Décomposer en facteurs des polynômes à deux ou plusieurs variables

Décompose ce trinôme en facteurs. Vérifie les facteurs.

$-12x^3y - 20xy^2 - 16x^2y^2$

SOLUTION

$-12x^3y - 20xy^2 - 16x^2y^2$

Décompose chaque terme du trinôme en facteurs.

$-12x^3y = -1 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$

$-20xy^2 = -1 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 5 \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \cdot y$

$-16x^2y^2 = -1 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \cdot y$

Le plus grand facteur commun est $2 \cdot 2 \cdot x \cdot y = 4xy$.

Écris chaque terme sous la forme du produit du plus grand facteur commun et d'un autre monôme.

$-12x^3y - 20xy^2 - 16x^2y^2$

$= 4xy(-3x^2) + 4xy(-5y) + 4xy(-4xy)$ Écris l'expression sous la forme d'un produit.

$= 4xy(-3x^2 - 5y - 4xy)$

$= 4xy(-1)(3x^2 + 5y + 4xy)$

$= -4xy(3x^2 + 5y + 4xy)$

Vérifie les facteurs : Développe $-4xy(3x^2 + 5y + 4xy)$

$= (-4xy)(3x^2) + (-4xy)(5y) + (-4xy)(4xy)$

$= -12x^3y - 20xy^2 - 16x^2y^2$

Tu obtiens le trinôme de départ, alors les facteurs sont exacts.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Décompose le trinôme en facteurs. Vérifie les facteurs.
$-20c^4d - 30c^3d^2 - 25cd$

[Réponse : $-5cd(4c^3 + 6c^2d + 5)$]

Quelles autres stratégies pourrais-tu utiliser ?

Dans l'exemple 3, le facteur commun -1 a été mis en évidence parce que chaque terme était négatif. Quand tu décomposes un polynôme qui a des termes négatifs, le premier terme de la parenthèse, par convention, doit être positif.

Place à la discussion

1. Quelles sont les ressemblances entre l'utilisation de carreaux algébriques pour multiplier un polynôme par un monôme et l'utilisation d'un modèle d'aire pour multiplier deux nombres naturels ?

2. Quelles sont les ressemblances entre les stratégies utilisées pour décomposer un polynôme en facteurs et les stratégies utilisées pour déterminer la factorisation première d'un nombre naturel ?

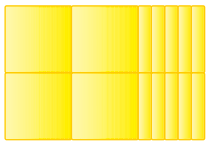
3. Tous les binômes sont-ils décomposables en facteurs ? Justifie ta réponse.

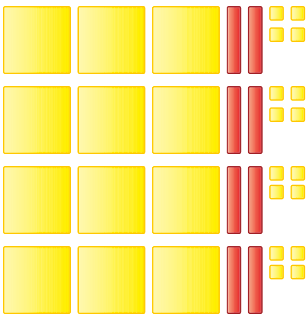
Exercices

A

4. Pour chaque ensemble de carreaux algébriques, écris le polynôme représenté et indique ses facteurs.

a) 

b) 

c) 

5. Décompose en facteurs les termes de chaque ensemble, puis détermine le plus grand facteur commun.

a) $6, 15n$ b) $4m, m^2$

6. Décompose chaque expression en facteurs à l'aide des plus grands facteurs communs obtenus à la question 5.

a) I) $6 + 15n$ II) $6 - 15n$
III) $15n - 6$ IV) $-15n + 6$

b) I) $4m + m^2$ II) $m^2 + 4m$
III) $4m - m^2$ IV) $m^2 - 4m$

B

7. Décompose chaque binôme en facteurs à l'aide de carreaux algébriques. Dessine les carreaux que tu utilises.

a) $5y + 10$ b) $6 + 12x^2$
c) $9k + 6$ d) $4s^2 + 14s$
e) $y + y^2$ f) $3h + 7h^2$

8. Décompose chaque binôme en facteurs. Pourquoi ne peux-tu pas utiliser des carreaux algébriques? Développe le produit pour vérifier les facteurs.

a) $9b^2 - 12b^3$ b) $48s^3 - 12$
c) $-a^2 - a^3$ d) $3x^2 + 6x^4$
e) $8y^3 - 12y$ f) $-7d - 14d^4$

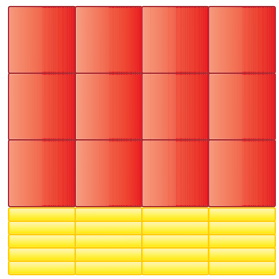
9. Décompose chaque trinôme en facteurs à l'aide de carreaux algébriques. Dessine les carreaux que tu utilises.

a) $3x^2 + 12x - 6$ b) $4 - 6y - 8y^2$
c) $-7m - 7m^2 - 14$ d) $10n - 6 - 12n^2$
e) $8 + 10x + 6x^2$ f) $-9 + 12b + 6b^2$

10. Décompose chaque trinôme en facteurs. Pourquoi ne peux-tu pas utiliser des carreaux algébriques? Développe le produit pour vérifier les facteurs.

a) $5 + 15m^2 - 10m^3$ b) $27n + 36 - 18n^3$
c) $6v^4 + 7v - 8v^3$ d) $-3c^2 - 13c^4 - 12c^3$
e) $24x + 30x^2 - 12x^4$ f) $s^4 + s^2 - 4s$

11. a) Écris le polynôme représenté par ces carreaux algébriques.



b) Décompose le polynôme en facteurs.
c) Compare les facteurs avec les dimensions du rectangle. Que remarques-tu?

12. a) Un élève a décomposé des polynômes en facteurs. Trouve les erreurs dans chaque solution. Écris une solution exacte.

I) Décompose $3m^2 + 9m^3 - 3m$ en facteurs.
Solution: $3m^2 + 9m^3 - 3m = 3m(m + 3m^2)$

II) Décompose $-16 + 8n - 4n^3$ en facteurs.
Solution: $-16 + 8n - 4n^3 =$
$-4(4 + 2n + n^2)$

b) Qu'est-ce que l'élève aurait dû faire pour vérifier son travail?

13. Suppose que tu écris chaque terme d'un polynôme sous la forme du produit d'un facteur commun et d'un monôme. Dans quel cas le monôme est-il 1? Dans quel cas est-il -1?

14. Simplifie chaque expression en regroupant les termes semblables, puis décompose-la en facteurs.

a) $x^2 + 6x - 7 - x^2 - 2x + 3$
b) $12m^2 - 24m - 3 + 4m^2 - 13$
c) $-7n^3 - 5n^2 + 2n - n^2 - n^3 - 12n$

15. a) Décompose en facteurs les termes de chaque ensemble, puis détermine le plus grand facteur commun.

i) $4s^2t^2$, $12s^2t^3$, $36st^2$

ii) $3a^3b$, $8a^2b$, $9a^4b$

iii) $12x^3y^2$, $12x^4y^3$, $36x^2y^4$

b) Décompose chaque trinôme en facteurs à l'aide des plus grands facteurs communs obtenus en a).

i) $4s^2t^2 + 12s^2t^3 + 36st^2$

ii) $12s^2t^3 - 4s^2t^2 - 36st^2$

iii) $-3a^3b - 9a^4b + 8a^2b$

iv) $9a^4b + 3a^3b - 8a^2b$

v) $36x^2y^4 + 12x^3y^2 + 12x^4y^3$

vi) $-36x^2y^4 - 12x^4y^3 - 12x^3y^2$

16. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier les facteurs.

a) $25xy + 15x^2 - 30x^2y^2$

b) $51m^2n + 39mn^2 - 72mn$

c) $9p^4q^2 - 6p^3q^3 + 12p^2q^4$

d) $10a^3b^2 + 12a^2b^4 - 5a^2b^2$

e) $12cd^2 - 8cd - 20c^2d$

f) $7r^3s^3 + 14r^2s^2 - 21rs^2$

17. Voici une formule pour calculer l'aire totale, A_t, d'un cylindre, où r est le rayon de la base et h est la hauteur :

$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

a) Décompose cette formule en facteurs.

b) À l'aide des deux formes de la formule, détermine l'aire totale d'un cylindre dont le rayon mesure 12 cm et la hauteur, 23 cm. Y a-t-il une forme plus efficace que l'autre ? Justifie ta réponse.

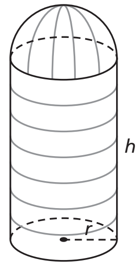
18. Voici une formule pour calculer l'aire totale, A_t, d'un cône, où r est le rayon de la base et a est la hauteur de l'apothème :

$A_t = \pi r^2 + \pi ra$

a) Décompose cette formule en facteurs.

b) À l'aide des deux formes de la formule, détermine l'aire totale d'un cône dont le rayon de la base mesure 9 cm et l'apothème, 15 cm. Y a-t-il une forme plus efficace que l'autre ? Justifie ta réponse.

19. Un silo consiste en un cylindre de hauteur h et de rayon r, surmonté d'une demi-sphère.



a) Écris une expression pour représenter l'aire totale du silo. Décompose l'expression en facteurs. Détermine l'aire totale du silo si le rayon de la base mesure 6 m et que la hauteur du cylindre est de 10 m. Quelle forme de l'expression utilises-tu ? Explique ton choix.

b) Écris une expression pour représenter le volume du silo. Décompose l'expression en facteurs. Détermine le volume du silo à l'aide des valeurs données en a) pour le rayon et la hauteur. Quelle forme de l'expression utilises-tu ? Explique ton choix.

20. Suppose que n est un nombre entier. L'expression $n^2 - n$ est-elle toujours un nombre entier ? Justifie ta réponse.

C

21. Une barre cylindrique a une base de rayon r et une hauteur h. On doit peinturer seulement la face courbe de la barre.

a) Écris une expression qui représente la fraction de l'aire totale qu'il faut peinturer.

b) Simplifie l'expression.

22. Une diagonale d'un polygone est un segment de droite qui relie deux sommets non adjacents.

a) Combien de diagonales peux-tu tracer à partir d'un sommet d'un pentagone ? d'un sommet d'un hexagone ?

b) Suppose que le polygone a n côtés. Combien de diagonales peux-tu tracer à partir d'un sommet ?

c) Le nombre total de diagonales d'un polygone à n côtés est de $\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2}$. Décompose cette expression en facteurs. Explique comment vérifier si la décomposition est exacte.

Réfléchis

Si un polynôme est écrit sous la forme du produit d'un monôme et d'un polynôme, comment sais-tu qu'il est complètement décomposé ?

LABORATOIRE

3.4 Modéliser un trinôme sous la forme d'un produit de binômes

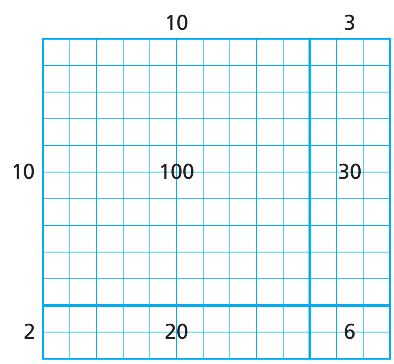
OBJECTIF DE LA LEÇON

Explorer la factorisation de polynômes à l'aide de carreaux algébriques.

Établis des liens

Tu peux représenter le produit de deux nombres à 2 chiffres à l'aide d'un modèle d'aire et de la distributivité.

$$\begin{aligned} 12 \times 13 &= (10 + 2)(10 + 3) \\ &= 10(10 + 3) + 2(10 + 3) \\ &= 10(10) + 10(3) + 2(10) + 2(3) \\ &= 100 + 30 + 20 + 6 \\ &= 156 \end{aligned}$$



Comment peux-tu déterminer les facteurs binomiaux d'un trinôme à l'aide d'un modèle d'aire ?

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Tu as besoin de carreaux algébriques. Utilise seulement des carreaux positifs.

A. Utilise 1 carreau x^2 et un nombre donné de carreaux x et de carreaux unitaires.

- Forme un rectangle avec les carreaux. Si tu n'y arrives pas, ajoute des carreaux x et des carreaux unitaires. Pour chaque rectangle, dessine les carreaux et écris la multiplication représentée.
- Choisis un nombre différent de carreaux x et de carreaux unitaires et refais l'activité pour obtenir 4 multiplications différentes.

B. Utilise 2 ou plusieurs carreaux x^2 et un nombre donné de carreaux x et de carreaux unitaires.

- Forme un rectangle avec les carreaux. Ajoute des carreaux x et des carreaux unitaires au besoin. Pour chaque rectangle, dessine les carreaux et écris la multiplication représentée.
- Choisis des nombres différents de carreaux et refais l'activité pour obtenir 4 multiplications différentes.

C. Montre ton travail à une ou à un camarade. Quelles régularités vois-tu dans les produits et les facteurs ?

Évalue ta compréhension

1. Parmi ces trinômes, lesquels peux-tu représenter par un rectangle ? Vérifie tes réponses à l'aide de carreaux algébriques. Dessine chaque rectangle.

a) $y^2 + 4y + 3$ **b)** $d^2 + 7d + 10$ **c)** $m^2 + 7m + 7$
d) $r^2 + 14r + 14$ **e)** $t^2 + 6t + 6$ **f)** $p^2 + 9p + 2$

2. Parmi ces trinômes, lesquels peux-tu représenter par un rectangle ? Vérifie tes réponses à l'aide de carreaux algébriques. Esquisse chaque rectangle.

a) $2s^2 + 7s + 3$ **b)** $3w^2 + 5w + 2$ **c)** $2f^2 + 3f + 2$
d) $2h^2 + 10h + 6$ **e)** $4n^2 + 2n + 1$ **f)** $6k^2 + 11k + 3$

3. Tu dois utiliser 1 carreau x^2 et 12 carreaux unitaires. Quels nombres de carreaux x peux-tu y ajouter pour former un rectangle ?

4. Tu dois utiliser 2 carreaux x^2 et 9 carreaux x. Quels nombres de carreaux unitaires peux-tu y ajouter pour former un rectangle ?

L'UNIVERS DES MATHS

Fait inusité : Les polynômes de Taylor

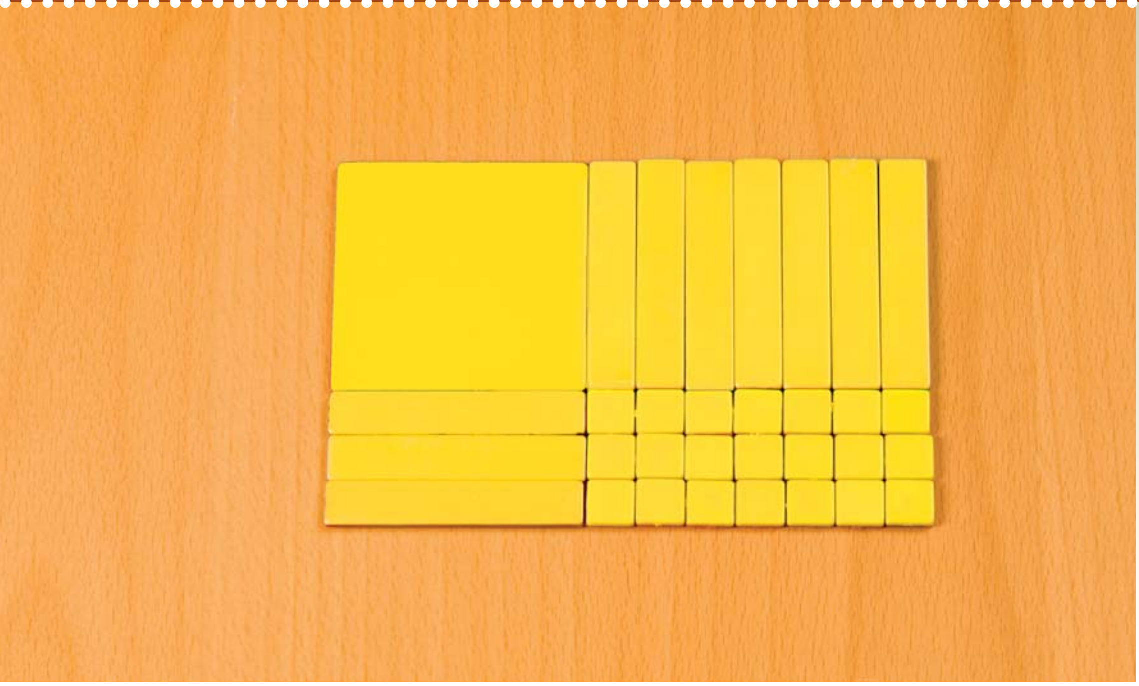
Un certain type de polynôme porte le nom du mathématicien anglais Brook Taylor (1685-1731). Les polynômes de Taylor servent à déterminer des valeurs approximatives.

Chaque fois que tu appuies sur la touche racine carrée d'une calculatrice scientifique, tu fais appel aux polynômes de Taylor. Il est possible de faire une approximation de la racine carrée d'un nombre situé entre 0 et 2 à l'aide du polynôme suivant :

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{1}{16}(x - 1)^3 - \frac{5}{128}(x - 1)^4$$

Estime la valeur de $\sqrt{1,5}$.
À l'aide d'une calculatrice, détermine combien de chiffres de ta réponse sont exacts.

3.5 Les polynômes de la forme $x^2 + bx + c$



OBJECTIF DE LA LEÇON

Multiplier des binômes et décomposer des trinômes en facteurs à l'aide de modèles et de stratégies algébriques.

Établis des liens

Comment chaque terme du trinôme suivant est-il représenté dans le modèle de carreaux algébriques ci-dessus ?

$(c + 3)(c + 7) = c^2 + 10c + 21$

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.

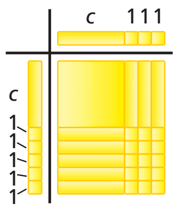
- Représente chaque produit par un rectangle. Écris une égalité qui montre la relation entre les facteurs et le produit.

  $(c + 4)(c + 2)$ $(c + 4)(c + 3)$ $(c + 4)(c + 4)$ $(c + 4)(c + 5)$
- Décris une régularité qui montre la relation entre les coefficients des termes des facteurs et les coefficients du produit.
- Utilise les régularités trouvées. À tour de rôle, ta ou ton camarade et toi devez écrire deux binômes puis déterminer leur produit en dessinant un rectangle.
- Décris une stratégie que tu pourrais utiliser pour multiplier deux binômes sans dessiner un rectangle.

Lorsque deux binômes comportent seulement des termes positifs, deux stratégies permettent de déterminer leur produit.

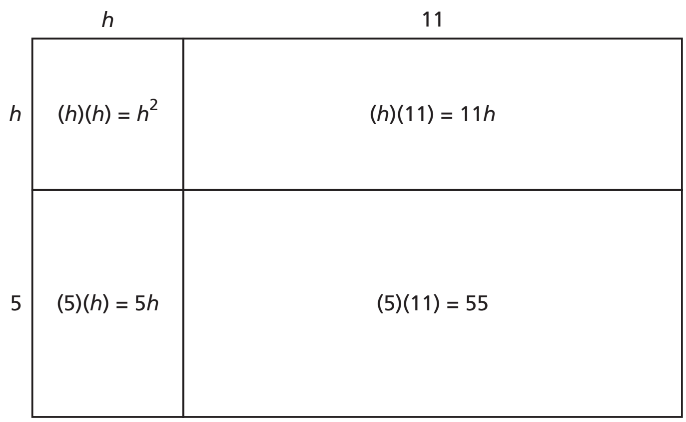
Utilise des carreaux algébriques.

Développe $(c + 5)(c + 3)$.
Pour ce faire, construis un rectangle de $c + 5$ sur $c + 3$.
Aligne des carreaux pour représenter chaque dimension et couvre ensuite le rectangle de carreaux.



Le produit est formé de 1 carreau c^2, 8 carreaux c et 15 carreaux unitaires.
Ainsi, $(c + 5)(c + 3) = c^2 + 8c + 15$

Utilise un modèle d'aire.
Développe $(h + 11)(h + 5)$.
Pour ce faire, dessine un rectangle de $h + 11$ sur $h + 5$.
Divise le rectangle en 4 rectangles plus petits et calcule l'aire de chacun.



$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } (h + 11)(h + 5) &= h^2 + 5h + 11h + 55 \\ &= h^2 + 16h + 55\end{aligned}$$

Regroupe les termes semblables.

Remarque que $(h + 11)(h + 5) = (h + 5)(h + 11)$, car les deux produits représentent l'aire du même rectangle.

Cette stratégie montre que le produit se compose de 4 termes. Tu obtiens ces termes à l'aide de la distributivité, c'est-à-dire en multipliant chaque terme du premier binôme par chaque terme du deuxième binôme.

$$(h + 11)(h + 5) = h^2 + 5h + 11h + 55$$

Quand des binômes comportent des termes négatifs, il n'est pas facile d'en déterminer le produit à l'aide de carreaux algébriques. De même, on ne peut pas en déterminer le produit à l'aide d'un modèle d'aire, puisqu'une aire négative n'existe pas. En revanche, on peut utiliser un schéma rectangulaire. On peut aussi appliquer la distributivité.

Exemple 1 Multiplier deux binômes

Développe chaque expression et simplifie-la.

a) $(x - 4)(x + 2)$ **b)** $(8 - b)(3 - b)$

SOLUTIONS

a) $(x - 4)(x + 2)$

Méthode nº 1

Utilise un schéma rectangulaire.

	x	2
x	$(x)(x) = x^2$	$(x)(2) = 2x$
-4	$(-4)(x) = -4x$	$(-4)(2) = -8$

$$\begin{aligned}(x - 4)(x + 2) &= x^2 + (-4x) + 2x + (-8)\\ &= x^2 - 2x - 8\end{aligned}$$

Regroupe les termes semblables.

Méthode nº 2

Applique la distributivité.

$$\begin{aligned}(x - 4)(x + 2) &= x(x + 2) + (-4)(x + 2)\\ &= x(x) + x(2) + (-4)(x) + (-4)(2)\\ &= x^2 + 2x - 4x - 8\\ &= x^2 - 2x - 8\end{aligned}$$

Regroupe les termes semblables.

b) $(8 - b)(3 - b)$

Applique la distributivité.

$$\begin{aligned}(8 - b)(3 - b) &= 8(3 - b) + (-b)(3 - b)\\ &= 8(3) + 8(-b) + (-b)(3) + (-b)(-b)\\ &= 24 - 8b - 3b + b^2\\ &= 24 - 11b + b^2\end{aligned}$$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Développe chaque expression et simplifie-la.

a) $(c + 3)(c - 7)$

b) $(5 - s)(9 - s)$

[Réponses : a) $c^2 - 4c - 21$; b) $45 - 14s + s^2$]

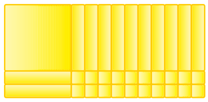
Quelles relations y a-t-il entre les termes constants des facteurs binomiaux et les deux derniers termes du trinôme qui est leur produit ? Comment ces relations peuvent-elles t'aider à déterminer le produit ?

La décomposition en facteurs et la multiplication sont des processus réciproques. Cela peut aider à décomposer un trinôme en facteurs.

Si un trinôme comporte seulement des termes positifs, tu peux le décomposer en facteurs à l'aide de carreaux algébriques.

Par exemple, pour décomposer $v^2 + 12v + 20$ en facteurs, forme un rectangle avec les carreaux qui représentent ces termes. Place le carreau v^2 dans le coin supérieur gauche, puis les carreaux v à droite et en dessous du carreau v^2, de sorte que les carreaux unitaires couvrent l'espace qui reste.

Quelle relation y a-t-il entre la décomposition en facteurs à l'aide de carreaux algébriques et la multiplication à l'aide d'un modèle d'aire ?



Par conséquent, $v^2 + 12v + 20 = (v + 2)(v + 10)$

Ainsi, les facteurs de $v^2 + 12v + 20$ sont $v + 2$ et $v + 10$.

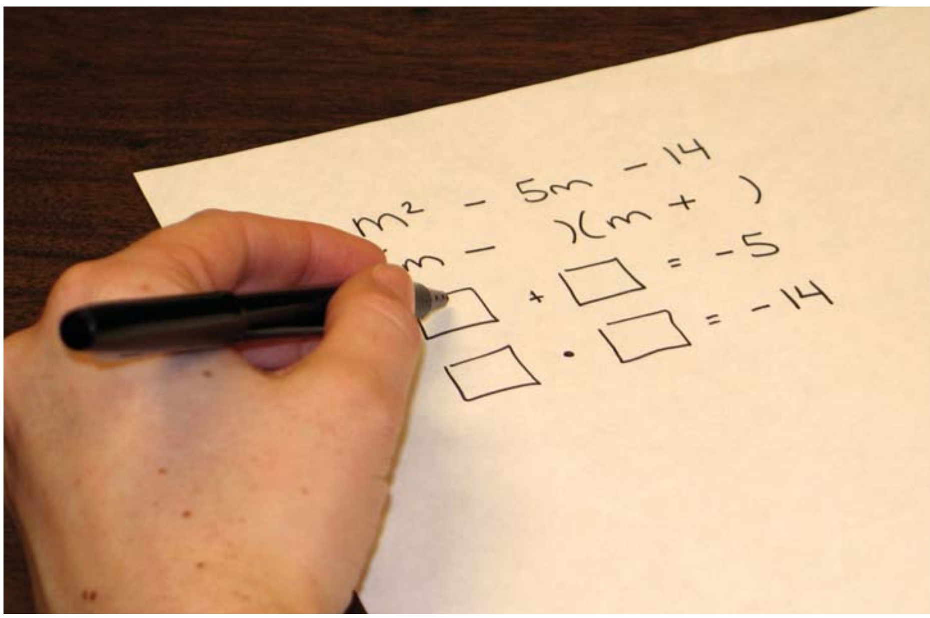
Examine les nombres qui apparaissent dans le trinôme et les binômes.

12 est la somme de 2 et de 10.

$$v^2 + 12v + 20 = (v + 2)(v + 10)$$

20 est le produit de 2 et de 10.

Comment peux-tu terminer cette décomposition en facteurs ?



La décomposition en facteurs d'un trinôme

Pour déterminer les facteurs d'un trinôme de la forme $x^2 + bx + c$, détermine d'abord deux nombres dont la somme est b et dont le produit est c. Ces nombres sont les termes constants de deux facteurs binomiaux. Le premier terme de chaque binôme est x.

Exemple 2 Décomposer des trinômes en facteurs

Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $x^2 - 2x - 8$ **b)** $z^2 - 12z + 35$

SOLUTION

a) $x^2 - 2x - 8$

Puisque la décomposition en facteurs et le développement sont des processus réciproques, il y aura deux facteurs binomiaux. Ils seront de la forme suivante :
$(x +$ un nombre entier$)$ $(x +$ un nombre entier$)$.
La somme des deux nombres entiers doit être -2 et leur produit, -8.
Pour déterminer les nombres entiers, énumère les paires de facteurs de -8, puis additionne les facteurs de chaque paire.
Étant donné que le produit est négatif, les facteurs ont des signes différents.

Facteurs de -8	Somme des facteurs
$-1, 8$	$-1 + 8 = 7$
$1, -8$	$1 - 8 = -7$
$-2, 4$	$-2 + 4 = 2$
$2, -4$	$2 - 4 = -2$

Les facteurs dont la somme est -2 sont 2 et -4.

Ces nombres entiers sont les deuxièmes termes des binômes.

$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$

b) $z^2 - 12z + 35$

Trouve deux nombres entiers dont la somme est -12 et dont le produit est 35.
Puisque le produit est positif, les facteurs ont le même signe.

Facteurs de 35	Somme des facteurs
$1, 35$	$1 + 35 = 36$
$-1, -35$	$-1 - 35 = -36$
$5, 7$	$5 + 7 = 12$
$-5, -7$	$-5 - 7 = -12$

Les facteurs dont la somme est -12 sont -5 et -7.

$z^2 - 12z + 35 = (z - 5)(z - 7)$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $x^2 - 8x + 7$

b) $a^2 + 7a - 18$

[Réponses : a) $(x - 7)(x - 1)$; b) $(a + 9)(a - 2)$]

L'ordre des facteurs binomiaux a-t-il une importance ? Justifie ta réponse.
Pourquoi dresses-tu la liste de tous les facteurs du produit donné plutôt qu'une liste des nombres qui ont la somme recherchée ?

Il faut toujours développer le produit afin de vérifier les facteurs binomiaux trouvés.

Pour la partie b) de l'exemple 2, développe $(z - 5)(z - 7)$.

$$\begin{aligned}(z - 5)(z - 7) &= z(z - 7) - 5(z - 7)\\ &= z^2 - 7z - 5z + 35\\ &= z^2 - 12z + 35\end{aligned}$$

Étant donné que tu obtiens le trinôme de départ, les facteurs sont exacts.

Les termes des trinômes de l'exemple 2 sont en *ordre décroissant de puissance*, c'est-à-dire du terme ayant le plus grand exposant au terme ayant le plus petit exposant.

Si les termes d'un trinôme sont écris dans l'ordre inverse, ils sont en *ordre croissant de puissance.*

Exemple 3 Décomposer un trinôme dont les termes sont en ordre croissant de puissance

Décompose $-24 - 5d + d^2$ en facteurs.

SOLUTIONS

Méthode nº 1

$-24 - 5d + d^2$

Les binômes seront de la forme :
(un nombre entier $+ d$) (un nombre entier $+ d$).

Trouve deux nombres entiers dont le produit est -24 et dont la somme est -5.

Ces nombres entiers sont -8 et 3.

Alors, $-24 - 5d + d^2 = (-8 + d)(3 + d)$

Méthode nº 2

Réécris le polynôme en ordre descendant.

$-24 - 5d + d^2 = d^2 - 5d - 24$

Trouve deux nombres entiers dont le produit est -24 et dont la somme est -5.

Ces nombres entiers sont -8 et 3.

$d^2 - 5d - 24 = (d - 8)(d + 3)$

La réponse obtenue par la méthode nº 1 est-elle équivalente à celle obtenue par la méthode nº 2 ? L'ordre des termes de chaque binôme a-t-il de l'importance ? Pourquoi ?

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Décompose $-30 + 7m + m^2$ en facteurs.

[Réponse : $(-3 + m)(10 + m)$]

Un trinôme qui peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs binomiaux peut aussi avoir un facteur commun.

Exemple 4 Décomposer un trinôme en un facteur commun et des facteurs binomiaux

Décompose ce trinôme en facteurs.

$-4t^2 - 16t + 128$

SOLUTION

$-4t^2 - 16t + 128$

Le plus grand facteur commun est 4. Étant donné que le coefficient du premier terme est négatif, utilise le facteur commun –4.

$-4t^2 - 16t + 128 = -4(t^2 + 4t - 32)$

Deux nombres dont la somme est 4 et dont le produit est –32 sont –4 et 8.

Alors, $t^2 + 4t - 32 = (t - 4)(t + 8)$

et $-4t^2 - 16t + 128 = -4(t - 4)(t + 8)$

Puisque la décomposition en facteurs et le développement sont des processus réciproques, vérifie les facteurs en les multipliant.

$$\begin{aligned} -4(t - 4)(t + 8) &= -4(t^2 + 4t - 32) \\ &= -4t^2 - 16t + 128 \end{aligned}$$

Puisque tu obtiens le trinôme de départ, les facteurs sont exacts.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

4. Décompose ce trinôme en facteurs.

$-5h^2 - 20h + 60$

[Réponse : $-5(h - 2)(h + 6)$]

De quelles autres façons peux-tu écrire le trinôme sous la forme d'un produit de trois facteurs ?

Quand tu compares les facteurs d'un trinôme, rappelle-toi que l'ordre d'addition des termes n'a pas d'importance. Ainsi, pour tout nombre entier a, $x + a = a + x$. De même, l'ordre de multiplication des termes n'a pas d'importance, de sorte que $(x + a)(x + b) = (x + b)(x + a)$.

Place à la discussion

1. Quelles sont les ressemblances entre la représentation du produit de deux binômes et la représentation du produit de deux nombres à 2 chiffres ?

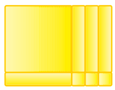
2. Comment un schéma rectangulaire fait-il le lien entre la multiplication de binômes et la décomposition en facteurs d'un trinôme ?

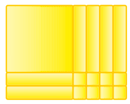
3. Soit la multiplication $x^2 + ax + b = (x + c)(x + d)$. Quelles relations y a-t-il entre a, b, c et d ?

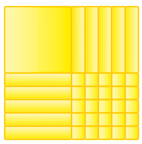
Exercices

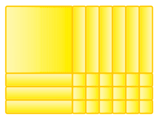
A

4. Écris la multiplication représentée par chaque ensemble de carreaux algébriques.

a) 

b) 

c) 

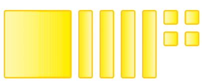
d) 

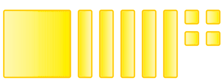
5. Détermine chaque produit à l'aide de carreaux algébriques. Dessine les carreaux que tu utilises.

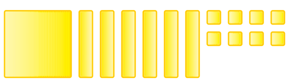
a) $(b + 2)(b + 5)$
b) $(n + 4)(n + 7)$
c) $(h + 8)(h + 3)$
d) $(k + 1)(k + 6)$

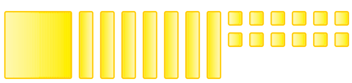
6. Pour chaque ensemble de carreaux algébriques :

I) écris le trinôme représenté ;
II) forme un rectangle avec les carreaux et dessine-le ;
III) décompose le trinôme en facteurs à l'aide du rectangle.

a) 

b) 

c) 

d) 

7. a) Trouve deux nombres entiers qui ont les propriétés indiquées.

	a	***b***	**Produit** ***ab***	**Somme** ***a + b***
I)			2	3
II)			6	5
III)			9	10
IV)			10	7
V)			12	7
VI)			15	8

b) Décompose chaque trinôme en facteurs à l'aide des résultats obtenus en a).

I) $v^2 + 3v + 2$ II) $w^2 + 5w + 6$
III) $s^2 + 10s + 9$ IV) $t^2 + 7t + 10$
V) $y^2 + 7y + 12$ VI) $h^2 + 8h + 15$

B

8. a) Décompose chaque trinôme en facteurs à l'aide de carreaux algébriques. Dessine les carreaux que tu utilises.

I) $v^2 + 2v + 1$ II) $v^2 + 4v + 4$
III) $v^2 + 6v + 9$ IV) $v^2 + 8v + 16$

b) Quelles régularités y a-t-il dans les rectangles ? Comment ces régularités se reflètent-elles dans les facteurs binomiaux ?

c) Écris les 3 prochains trinômes de la régularité et leurs facteurs binomiaux.

9. Multiplie les binômes de chaque paire. Représente chaque produit à l'aide d'un rectangle annoté.

a) $(m + 5)(m + 8)$ **b)** $(y + 9)(y + 3)$
c) $(w + 2)(w + 16)$ **d)** $(k + 13)(k + 1)$

10. Copie les multiplications et complète-les.

a) $(w + 3)(w + 2) = w^2 + \square w + 6$
b) $(x + 5)(x + \square) = x^2 + \square x + 10$
c) $(y + \square)(y + \square) = y^2 + 12y + 20$

11. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier les facteurs.

a) $x^2 + 10x + 24$ **b)** $m^2 + 10m + 16$
c) $p^2 + 13p + 12$ **d)** $s^2 + 12s + 20$
e) $n^2 + 12n + 11$ **f)** $h^2 + 8h + 12$
g) $q^2 + 7q + 6$ **h)** $b^2 + 11b + 18$

12. Développe et simplifie chaque produit. Représente chaque produit à l'aide d'un schéma rectangulaire.

a) $(g - 3)(g + 7)$ b) $(h + 2)(h - 7)$
c) $(11 - j)(2 - j)$ d) $(k - 3)(k + 11)$
e) $(12 + h)(7 - h)$ f) $(m - 9)(m + 9)$
g) $(n - 14)(n - 4)$ h) $(p + 6)(p - 17)$

13. Trouve les erreurs dans chaque développement et corrige-les.

a) $$\begin{aligned}(r - 13)(r + 4) &= r(r + 4) - 13(r + 4)\\ &= r^2 + 4r - 13r + 52\\ &= r^2 + 9r + 52\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(s - 15)(s - 5) &= s(s - 15) + 15(s + 5)\\ &= s^2 - 15s + 15s + 75\\ &= s^2 + 75\end{aligned}$$

14. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier les facteurs.

a) $b^2 + 19b - 20$ b) $t^2 + 15t - 54$
c) $x^2 + 12x - 28$ d) $n^2 - 5n - 24$
e) $a^2 - a - 20$ f) $y^2 - 2y - 48$
g) $m^2 - 15m + 50$ h) $a^2 - 12a + 36$

15. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier les facteurs.

a) $12 + 13k + k^2$ b) $-16 - 6g + g^2$
c) $60 + 17y + y^2$ d) $72 - z - z^2$

16. a) Simplifie chaque paire de produits.
 I) $(x + 1)(x + 2)$ et $11 \cdot 12$
 II) $(x + 1)(x + 3)$ et $11 \cdot 13$
b) Quelles sont les ressemblances entre les deux réponses pour chaque paire de produits ?

17. Trouve les erreurs dans chaque factorisation et corrige-les.

a) $m^2 - 7m - 60 = (m - 5)(m - 12)$
b) $w^2 - 14w + 45 = (w + 3)(w - 15)$
c) $b^2 + 9b - 36 = (b + 3)(b - 12)$

18. a) Développe chaque produit et écris-le sous la forme d'un trinôme.
 I) $(t + 4)(t + 7)$ II) $(t - 4)(t - 7)$
 III) $(t - 4)(t + 7)$ IV) $(t + 4)(t - 7)$
b) I) Pourquoi les termes constants des trinômes I) et II) en a) sont-ils positifs ?
 II) Pourquoi les termes constants des trinômes III) et IV) en a) sont-ils négatifs ?
 III) Comment peux-tu déterminer le coefficient du terme t du trinôme sans développer le produit ?

19. Remplace chaque $\square$ par un nombre entier afin de rendre chaque trinôme décomposable en facteurs. Combien de nombres entiers peux-tu trouver dans chaque cas ?

a) $x^2 + \square x + 10$ b) $a^2 + \square a - 9$
c) $t^2 + \square t + 8$ d) $y^2 + \square y - 12$
e) $h^2 + \square h + 18$ f) $p^2 + \square p - 16$

20. Remplace chaque $\square$ par un nombre entier afin de rendre chaque trinôme décomposable en facteurs. Combien de nombres entiers peux-tu trouver dans chaque cas ?

a) $r^2 + r + \square$ b) $h^2 - h + \square$
c) $b^2 + 2b + \square$ d) $z^2 - 2z + \square$
e) $q^2 + 3q + \square$ f) $g^2 - 3g + \square$

21. Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $4y^2 - 20y - 56$ b) $-3m^2 - 18m - 24$
c) $4x^2 + 4x - 48$ d) $10x^2 + 80x + 120$
e) $-5n^2 + 40n - 35$ f) $7c^2 - 35c + 42$

C

22. Dans cette leçon, tu as utilisé des carreaux algébriques pour multiplier deux binômes et pour décomposer en facteurs un trinôme dont tous les termes étaient positifs.

a) Comment peux-tu développer $(r - 4)(r + 1)$ à l'aide de carreaux algébriques ?
 Dessine les carreaux que tu utilises.
 Explique ta stratégie.
b) Comment peux-tu décomposer $t^2 + t - 6$ en facteurs à l'aide de carreaux algébriques ?
 Dessine les carreaux que tu utilises.
 Explique ta stratégie.

23. a) Décompose chaque trinôme en facteurs.
 I) $h^2 - 10h - 24$ II) $h^2 + 10h - 24$
 III) $h^2 - 10h + 24$ IV) $h^2 + 10h + 24$
b) Tous les trinômes en a) ont les mêmes coefficients numériques et les mêmes termes constants, mais des signes différents. Cite d'autres exemples où il est possible de décomposer en facteurs les 4 trinômes de la forme $h^2 \pm bh \pm c$.

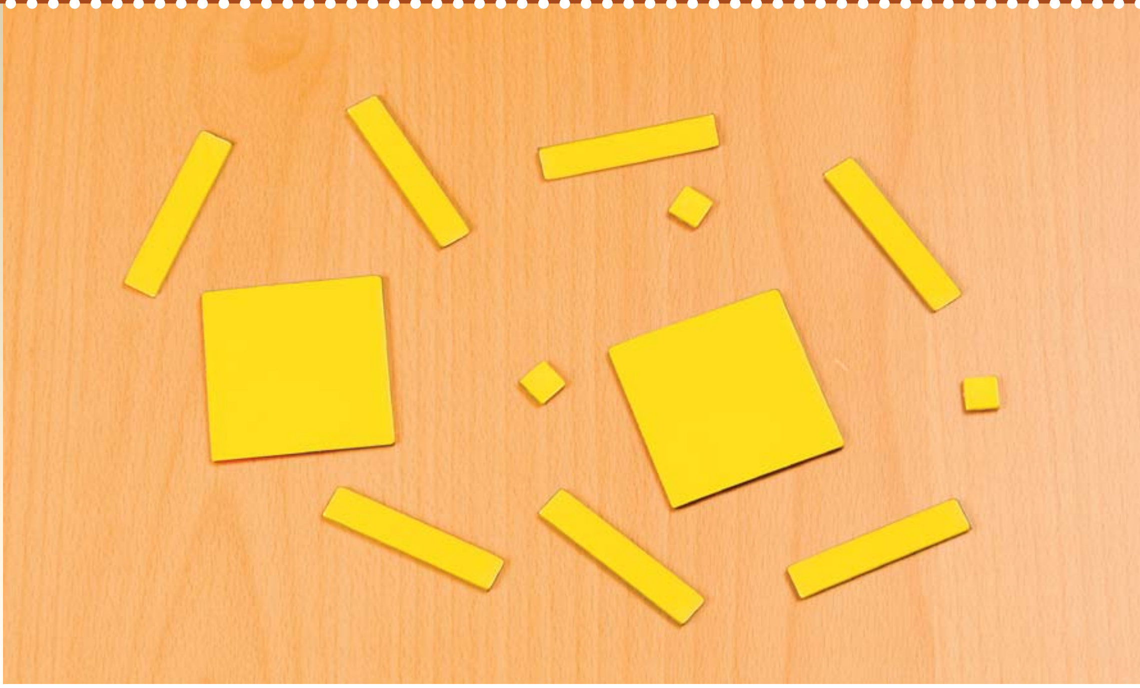
Réfléchis

Suppose qu'un trinôme de la forme $x^2 + ax + b$ est le produit de deux binômes. Comment peux-tu déterminer les facteurs binomiaux ?

3.6 Les polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$

OBJECTIF DE LA LEÇON

Étendre les stratégies pour la multiplication des binômes et la décomposition en facteurs des trinômes.



Établis des liens

Quel est le trinôme représenté par les carreaux algébriques ci-dessus ?

Comment peux-tu former un rectangle avec ces carreaux ?

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille avec une ou un camarade.

Tu as besoin de carreaux algébriques.

Quels trinômes parmi les suivants peux-tu représenter par un rectangle de carreaux algébriques ? Pour chaque trinôme que tu peux représenter par un rectangle, écris la multiplication correspondante.

$2x^2 + 15x + 7$	$2x^2 + 5x + 2$	$6x^2 + 7x + 2$
$5x^2 + 4x + 4$	$2x^2 + 9x + 10$	$5x^2 + 11x + 2$

Pour multiplier deux binômes dont les coefficients des termes variables sont différents de 1, utilise les mêmes stratégies que dans la leçon 3.5.

Exemple 1 Multiplier deux binômes dont tous les termes sont positifs

Développe $(3d + 4)(4d + 2)$.

SOLUTIONS

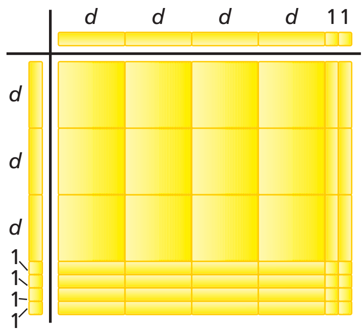
Méthode nº 1

Utilise des carreaux algébriques.

Construis un rectangle de $3d + 4$ sur $4d + 2$.

Aligne des carreaux pour représenter chaque dimension, puis couvre le rectangle de carreaux.

Les carreaux qui forment le produit représentent $12d^2 + 22d + 8$.



Ainsi, $(3d + 4)(4d + 2) = 12d^2 + 22d + 8$

Méthode nº 2

Utilise un modèle d'aire.

Pour développer $(3d + 4)(4d + 2)$, trace un rectangle de $3d + 4$ sur $4d + 2$. Divise ce rectangle en 4 rectangles plus petits et calcule l'aire de chacun d'eux.

	$3d$	4
$4d$	$(4d)(3d) = 12d^2$	$(4d)(4) = 16d$
2	$(2)(3d) = 6d$	$(2)(4) = 8$

L'aire du grand rectangle est la somme des aires des plus petits rectangles.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } (3d + 4)(4d + 2) &= 12d^2 + 16d + 6d + 8\\ &= 12d^2 + 22d + 8\end{aligned}$$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Développe $(5e + 3)(2e + 4)$.

[Réponse : $10e^2 + 26e + 12$]

Ce schéma rectangulaire montre la relation entre les coefficients du produit et les coefficients des facteurs binomiaux pour $(ax + b)(cx + d)$.

	cx	d
ax	$(ax)(cx) = acx^2$	$(ax)(d) = adx$
b	$(b)(cx) = bcx$	$(b)(d) = bd$

$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd$

Quand les binômes comportent des termes négatifs, il peut être difficile de représenter leur produit à l'aide de carreaux algébriques. Tu peux appliquer la distributivité pour en déterminer le produit.

Exemple 2 Multiplier deux binômes ayant des coefficients négatifs

Développe puis simplifie $(-2g + 8)(7 - 3g)$.

SOLUTIONS

Méthode nº 1

Utilise un schéma rectangulaire.

Écris $(-2g + 8)(7 - 3g)$ sous la forme $[(-2g) + 8][7 + (-3g)]$.

Trace un rectangle de $(-2g) + 8$ sur $7 + (-3g)$.

Divise ce rectangle en 4 rectangles plus petits et indique ce que chacun représente.

	7	$-3g$
$-2g$	$(-2g)(7) = -14g$	$(-2g)(-3g) = 6g^2$
8	$(8)(7) = 56$	$(8)(-3g) = -24g$

$$\begin{aligned}(-2g + 8)(7 - 3g) &= -14g + 6g^2 + 56 - 24g\\ &= 6g^2 - 14g - 24g + 56\\ &= 6g^2 - 38g + 56\end{aligned}$$

Méthode nº 2

Applique la distributivité.

$$\begin{aligned}(-2g + 8)(7 - 3g) &= (-2g)(7 - 3g) + 8(7 - 3g)\\ &= -14g + 6g^2 + 56 - 24g\\ &= -38g + 6g^2 + 56\\ &= 6g^2 - 38g + 56\end{aligned}$$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

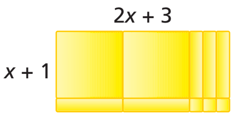
2. Développe puis simplifie $(6t - 9)(7 - 5t)$.

[Réponse : $-30t^2 + 87t - 63$]

Quels termes des facteurs binomiaux déterminent la valeur de chaque terme du trinôme ? Comment peux-tu utiliser ces relations pour simplifier le calcul ?

Tu peux décomposer un trinôme en facteurs à l'aide de carreaux algébriques quand tous ses termes sont positifs.

Par exemple, pour décomposer $2x^2 + 5x + 3$ en facteurs, forme un rectangle avec les carreaux qui représentent ces termes.



Ce modèle de carreaux algébriques montre la relation entre les termes des deux facteurs binomiaux et les termes du trinôme.

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

$2x^2$ est le produit des premiers termes des binômes.

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

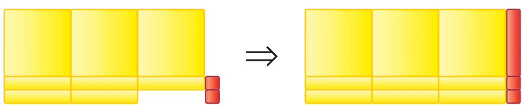
$5x$ est la somme de ces produits : $2x(1) + 3(x)$.

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

3 est le produit des deuxièmes termes des binômes.

Quand on utilise des carreaux algébriques pour décomposer en facteurs un trinôme ayant des termes négatifs, il est parfois nécessaire d'ajouter des paires de carreaux de valeurs opposées, équivalentes à zéro. Par exemple, pour décomposer en facteurs le trinôme $3x^2 + 5x - 2$, essaie d'abord de former un rectangle avec les carreaux. Pour compléter le rectangle, tu as besoin de deux carreaux x. Alors, ajoute un carreau x positif et un carreau x négatif. Assure-toi de placer tous les carreaux x positifs ensemble.

Que sais-tu à propos d'un polynôme pour lequel il est impossible de former un rectangle ?



Ainsi, $3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2)$

Il est impossible de décomposer en facteurs certains trinômes, tels que $2x^2 + x + 1$. Dans ces cas, tu ne peux pas ajouter des paires de carreaux x de valeurs opposées pour former un rectangle.

Tu peux utiliser les régularités de la page précédente et le raisonnement logique pour effectuer une décomposition en facteurs sans l'aide de carreaux algébriques. Souvent, si tu examines bien les grandeurs relatives des coefficients, tu peux estimer les facteurs des coefficients du trinôme à essayer en premier.

Exemple 3 Décomposer un trinôme en facteurs à l'aide du raisonnement logique

Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $4h^2 + 20h + 9$ **b)** $6k^2 - 11k - 35$

SOLUTIONS

a) Méthode nº 1

$4h^2 + 20h + 9$

Trouve des facteurs de la forme $(ah + b)(ch + d)$.

Le coefficient de h^2 est 4. Alors, les coefficients des premiers termes des binômes sont des facteurs de 4, soit 1 et 4 ou 2 et 2.

Les binômes sont donc de la forme

$(h + b)(4h + d)$ ou $(2h + b)(2h + d)$.

Le terme constant du trinôme est 9. Alors, les deuxièmes termes des binômes sont des facteurs de 9, soit 1 et 9 ou 3 et 3.

Les binômes possibles sont donc :

$(h + 1)(4h + 9)$ ou $(2h + 1)(2h + 9)$ ou

$(h + 9)(4h + 1)$ ou $(2h + 9)(2h + 1)$ ou

$(h + 3)(4h + 3)$ ou $(2h + 3)(2h + 3)$

Pour chacun des 6 produits ci-dessus, vérifie si le terme en h est égal à $20h$.

$(h + 1)(4h + 9) = 4h^2 + 13h + 9$
$(2h + 1)(2h + 9) = 4h^2 + 20h + 9$

Comme tu viens d'obtenir le trinôme de départ, tu n'as pas besoin de continuer.

$4h^2 + 20h + 9 = (2h + 1)(2h + 9)$

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $4g^2 + 11g + 6$

b) $6m^2 - 7m - 10$

[Réponses : a) $(4g + 3)(g + 2)$; b) $(6m + 5)(m - 2)$]

Dans la partie a) de l'exemple 3, pourquoi n'était-il pas nécessaire d'énumérer et de vérifier les facteurs négatifs de 4 ?

Méthode nº 2

$4h^2 + 20h + 9$

Utilise le sens du nombre, le raisonnement et le calcul mental.

Les facteurs de $4h^2$ sont $4h$ et $1h$ ou $2h$ et $2h$.

Les facteurs de 9 sont 9 et 1 ou 3 et 3.

Le coefficient du terme du milieu du trinôme, 20, est plus grand que les coefficients des deux autres termes. Essaie donc les facteurs les plus grands. Dispose les combinaisons de facteurs à la verticale.

$4h \quad 9$	$2h \quad 9$	Forme les produits et additionne-les.
$1h \quad 1$	$2h \quad 1$	
$4h + 9h = 13h$	$2h + 18h = 20h$ ←	Ceci est la bonne combinaison de facteurs.

Ainsi, $4h^2 + 20h + 9 = (2h + 9)(2h + 1)$

b) Méthode nº 1

$6k^2 - 11k - 35$

Trouve des facteurs de la forme $(ak + b)(ck + d)$.

Le coefficient de k^2 est 6. Alors, les coefficients des premiers termes des binômes sont des facteurs de 6, soit 1 et 6 ou 2 et 3.

Le terme constant du trinôme est -35. Alors, les deuxièmes termes des binômes sont des facteurs de -35, soit 1 et -35, -1 et 35, -5 et 7 ou 5 et -7.

Le coefficient du terme du milieu du trinôme, -11, se situe entre les coefficients des deux autres termes. Essaie donc des combinaisons des moins grands facteurs, c'est-à-dire des combinaisons de 2 et de 3 avec des combinaisons de ± 5 et de ± 7.

Les binômes possibles sont donc :

$(2k + 5)(3k - 7)$ ou $(2k - 7)(3k + 5)$ ou
$(2k - 5)(3k + 7)$ ou $(2k + 7)(3k - 5)$

Pour chacun des 4 produits ci-dessus, vérifie si le terme en k est égal à $-11k$.

$(2k + 5)(3k - 7) = 6k^2 + k - 35$
$(2k - 7)(3k + 5) = 6k^2 - 11k - 35$

Comme tu viens d'obtenir le trinôme de départ, tu n'as pas besoin de continuer.

$6k^2 - 11k - 35 = (2k - 7)(3k + 5)$

(Suite de la solution à la page suivante)

Dans la partie b) de l'exemple 3, pourquoi n'était-il pas nécessaire d'énumérer et de vérifier les facteurs négatifs de 6 ?

Méthode nº 2

$6k^2 - 11k - 35$

Utilise le sens du nombre et le calcul mental, ainsi que la stratégie Prédire et vérifier. Les facteurs de $6k^2$ sont $1k$ et $6k$ ou $2k$ et $3k$. Les facteurs de -35 sont 1 et -35, -1 et 35, -7 et 5 ou 7 et -5.
Le coefficient du terme du milieu du trinôme, -11, se situe entre les coefficients des deux autres termes. Essaie donc des facteurs de ces coefficients qui seraient au milieu si tu énumérais les facteurs en ordre numérique. Dispose les combinaisons de facteurs à la verticale.

Forme les produits et additionne-les.

$$\begin{array}{ccc} 2k & \times & 7 \\ 3k & & -5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 2k & \times & -7 \\ 3k & & 5 \end{array}$$

Ceci est la bonne combinaison de facteurs.

$-10k + 21k = 11k \qquad 10k - 21k = -11k$

$6k^2 - 11k - 35 = (2k - 7)(3k + 5)$

Décomposer un trinôme en facteurs par la **méthode de la somme et du produit** consiste à réécrire le terme du milieu sous la forme de la somme de deux termes, pour ensuite déterminer un facteur binomial commun aux deux paires de termes formées.

Pourquoi n'est-il pas nécessaire d'énumérer les facteurs négatifs de 24 ?

La **méthode de la somme et du produit** est une autre façon de décomposer un trinôme en facteurs.

Soit $(3h + 4)(2h + 1)$. Tu peux appliquer la distributivité pour développer ce produit :
$$\begin{aligned}(3h + 4)(2h + 1) &= 3h(2h + 1) + 4(2h + 1)\\ &= 6h^2 + 3h + 8h + 4\\ &= 6h^2 + 11h + 4\end{aligned}$$

Pour décomposer $6h^2 + 11h + 4$ en facteurs par la méthode de la somme et du produit, il faut renverser les étapes ci-dessus.

Le produit des coefficients des termes en h est $3(8) = 24$. Il est donc égal au produit du coefficient du terme en h^2 et du terme constant : $6(4) = 24$.

Par conséquent, on peut *décomposer* le terme en h du trinôme en le réécrivant sous la forme de deux termes dont les coefficients ont un produit de 24.

Facteurs de 24	Somme des facteurs
1, 24	$1 + 24 = 25$
2, 12	$2 + 12 = 14$
3, 8	$3 + 8 = 11$
4, 6	$4 + 6 = 10$

Les deux cœfficients sont 3 et 8, écris donc le trinôme $6h^2 + 11h + 4$ sous la forme $6h^2 + 3h + 8h + 4$.

Mets en évidence un facteur commun des deux premiers termes et un facteur commun des deux derniers termes :
$6h^2 + 3h + 8h + 4 = 3h(2h + 1) + 4(2h + 1)$
Chaque produit a en commun le facteur binomial $2h + 1$.
$6h^2 + 11h + 4 = (2h + 1)(3h + 4)$

Exemple 4 — Décomposer un trinôme en facteurs par la méthode de la somme et du produit

Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $3s^2 - 13s - 10$ **b)** $6x^2 - 21x + 9$

SOLUTION

a) $3s^2 - 13s - 10$

Vérifie s'il y a des facteurs communs ; il n'y en a pas.

Le produit du coefficient de s^2 et du terme constant est $3(-10) = -30$. Écris donc $-13s$ comme la somme de deux termes dont les coefficients ont un produit de -30.

Facteurs de -30	Somme des facteurs
$1, -30$	$1 - 30 = -29$
$-1, 30$	$-1 + 30 = 29$
$2, -15$	$2 - 15 = -13$
$-2, 15$	$-2 + 15 = 13$
$3, -10$	$3 - 10 = -7$
$-3, 10$	$-3 + 10 = 7$
$5, -6$	$5 - 6 = -1$
$-5, 6$	$-5 + 6 = 1$

Les deux coefficients sont 2 et -15 ; écris donc le trinôme $3s^2 - 13s - 10$ sous la forme $3s^2 + 2s - 15s - 10$.

Mets en évidence un facteur commun des deux premiers termes et un facteur commun des deux derniers termes :

$3s^2 + 2s - 15s - 10 = s(3s + 2) - 5(3s + 2)$

Chaque produit a un facteur binomial en commun.

$3s^2 + 2s - 15s - 10 = (3s + 2)(s - 5)$

Ainsi, $3s^2 - 13s - 10 = (3s + 2)(s - 5)$

b) $6x^2 - 21x + 9$

Vérifie s'il y a des facteurs communs ; 3 est un facteur commun.

Alors, $6x^2 - 21x + 9 = 3(2x^2 - 7x + 3)$

Décompose $2x^2 - 7x + 3$ en facteurs.

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

4. Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $8p^2 - 18p - 5$

b) $24h^2 - 20h - 24$

[Réponses : a) $(2p - 5)(4p + 1)$; b) $4(2h - 3)(3h + 2)$]

S'il faut écrire le terme du milieu sous la forme de la somme de deux termes, est-il possible d'écrire $3s^2 - 15s + 2s - 10$? Justifie ta réponse.

Le produit du coefficient de x^2 et du terme constant est $2(3) = 6$.

Écris donc $-7x$ comme la somme de deux termes dont les coefficients ont un produit de 6.

Facteurs de 6	Somme des facteurs
1, 6	$1 + 6 = 7$
−1, −6	$-1 - 6 = -7$
2, 3	$2 + 3 = 5$
−2, −3	$-2 - 3 = -5$

Les deux coefficients sont -1 et -6; écris donc le trinôme $2x^2 - 7x + 3$ sous la forme $2x^2 - 1x - 6x + 3$.

Mets en évidence un facteur commun des deux premiers termes et un facteur commun des deux derniers termes:

$2x^2 - 1x - 6x + 3 = x(2x - 1) - 3(2x - 1)$

Chaque produit a un facteur binomial en commun.

$2x^2 - 1x - 6x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$

Ainsi, $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$

et $6x^2 - 21x + 9 = 3(2x - 1)(x - 3)$

Quand utiliserais-tu la méthode de la somme et du produit pour décomposer un trinôme en facteurs ?

Pour vérifier les facteurs, multiplie-les.
Pour la partie b) de l'exemple 4, effectue cette multiplication:

$$\begin{aligned} 3(2x - 1)(x - 3) &= 3(2x^2 - 6x - x + 3) \\ &= 3(2x^2 - 7x + 3) \\ &= 6x^2 - 21x + 9 \end{aligned}$$

Puisque tu obtiens le trinôme de départ, les facteurs sont exacts.

Place à la discussion

1. Quelles sont les ressemblances entre les stratégies pour multiplier des facteurs binomiaux de la forme $(ax + b)(cx + d)$ et les stratégies que tu as utilisées dans la leçon 3.5 pour les produits de la forme $(x + a)(x + b)$? Quelles sont les différences ?

2. Comment peux-tu utiliser les coefficients d'un trinôme pour déterminer les coefficients de ses facteurs binomiaux ?

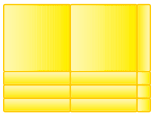
3. Comment sais-tu qu'un trinôme n'est pas décomposable en facteurs ?

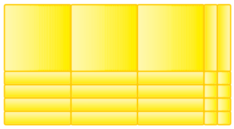
4. Quand tu décomposes un trinôme en facteurs par la méthode de la somme et du produit ou la stratégie Prédire et vérifier, comment peux-tu utiliser le raisonnement logique pour réduire le nombre de combinaisons de coefficients à vérifier ?

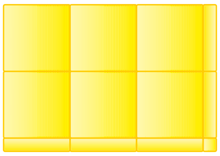
Exercices

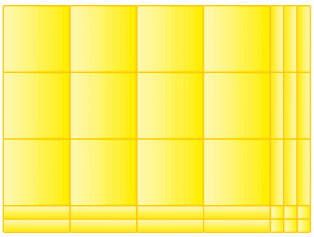
A

5. Écris la multiplication représentée par chaque ensemble de carreaux algébriques.

a) 

b) 

c) 

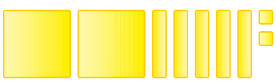
d) 

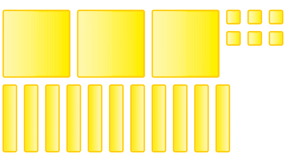
6. Détermine chaque produit à l'aide de carreaux algébriques.

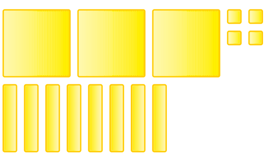
a) $(2v + 3)(v + 2)$ **b)** $(3r + 1)(r + 4)$
c) $(2g + 3)(3g + 2)$ **d)** $(4z + 3)(2z + 5)$
e) $(3t + 4)(3t + 4)$ **f)** $(2r + 3)(2r + 3)$

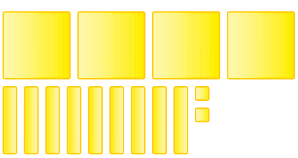
7. Pour chaque ensemble de carreaux algébriques :

I) écris le trinôme représenté ;
II) forme un rectangle avec les carreaux et dessine-le ;
III) décompose le trinôme en facteurs à l'aide du rectangle.

a) 

b) 

c) 

d) 

B

8. Copie et complète chaque énoncé.

a) $(2w + 1)(w + 6) = 2w^2 + \square w + 6$
b) $(2g - 5)(3g - 3) = 6g^2 + \square + \square$
c) $(-4v - 3)(-2v - 7) = \square + \square + 21$

9. Développe chaque produit puis simplifie-le.

a) $(5 + f)(3 + 4f)$
b) $(3 - 4t)(5 - 3t)$
c) $(10 - r)(9 + 2r)$
d) $(-6 + 2m)(-6 + 2m)$
e) $(-8 - 2x)(3 - 7x)$
f) $(6 - 5n)(-6 + 5n)$

10. Développe chaque produit puis simplifie-le.

a) $(3c + 4)(5 + 2c)$
b) $(1 - 7t)(3t + 5)$
c) $(-4r - 7)(2 - 8r)$
d) $(-9 - t)(-5t - 1)$
e) $(7h + 10)(-3 + 5h)$
f) $(7 - 6y)(6y - 7)$

11. a) Décompose chaque polynôme en facteurs à l'aide de carreaux algébriques. Dessine les carreaux que tu utilises.

I) $3t^2 + 4t + 1$
II) $3t^2 + 8t + 4$
III) $3t^2 + 12t + 9$
IV) $3t^2 + 16t + 16$

b) Quelles régularités y a-t-il dans les rectangles formés ? Comment ces régularités se reflètent-elles dans les facteurs binomiaux ?

c) Écris les 3 prochains trinômes de la régularité et leurs facteurs binomiaux.

12. Décompose chaque trinôme en facteurs. Quelles régularités y a-t-il dans les trinômes et leurs facteurs ?

a) I) $2n^2 + 13n + 6$ II) $2n^2 - 13n + 6$
b) I) $2n^2 + 11n - 6$ II) $2n^2 - 11n - 6$
c) I) $2n^2 + 7n + 6$ II) $2n^2 - 7n + 6$

13. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier les facteurs.

a) $2y^2 + 5y + 2$ **b)** $2a^2 + 11a + 12$
c) $2k^2 + 13k + 15$ **d)** $2m^2 - 11m + 12$
e) $2k^2 - 11k + 15$ **f)** $2m^2 + 15m + 7$
g) $2g^2 + 15g + 18$ **h)** $2n^2 + 9n - 18$

14. **a)** Trouve deux nombres entiers qui ont les propriétés indiquées.

	Produit	Somme
I)	15	16
II)	24	14
III)	15	8
IV)	12	7
V)	12	13
VI)	24	11

b) Décompose chaque trinôme en facteurs à l'aide des résultats obtenus en a) et de la méthode de la somme et du produit.

I) $3v^2 + 16v + 5$ II) $3m^2 + 14m + 8$
III) $3b^2 + 8b + 5$ IV) $4a^2 + 7a + 3$
V) $4d^2 + 13d + 3$ VI) $4v^2 + 11v + 6$

15. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier les facteurs.

a) $5a^2 - 7a - 6$ **b)** $3y^2 - 13y - 10$
c) $5s^2 + 19s - 4$ **d)** $14c^2 - 19c - 3$
e) $8a^2 + 18a - 5$ **f)** $8r^2 - 14r + 3$
g) $6d^2 + d - 5$ **h)** $15e^2 - 7e - 2$

16. Trouve les erreurs dans chaque décomposition en facteurs et corrige-les.

a) $6u^2 + 17u - 14 = (2u - 7)(3u + 2)$
b) $3k^2 - k - 30 = (3k - 3)(k + 10)$
c) $4v^2 - 21v + 20 = (4v - 4)(v + 5)$

17. Trouve les erreurs dans cette décomposition par la méthode de la somme et du produit et corrige-les.

$$\begin{aligned} 15g^2 + 17g - 42 &= 15g^2 - 18g + 35g - 42 \\ &= 3g(5g - 6) + 7(5g + 6) \\ &= (3g + 7)(5g + 6) \end{aligned}$$

18. Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $20r^2 + 70r + 60$ **b)** $15a^2 - 65a + 20$
c) $18h^2 + 15h - 18$ **d)** $24u^2 - 72u + 54$
e) $12m^2 - 52m - 40$ **f)** $24g^2 - 2g - 70$

19. Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $14y^2 - 13y + 3$ **b)** $10p^2 - 17p - 6$
c) $10r^2 - 33r - 7$ **d)** $15g^2 - g - 2$
e) $4x^2 + 4x - 15$ **f)** $9d^2 - 24d + 16$
g) $9t^2 + 12t + 4$ **h)** $40y^2 + y - 6$
i) $24c^2 + 26c - 15$ **j)** $8x^2 + 14x - 15$

20. Remplacer chaque □ par un nombre entier afin de rendre chaque trinôme décomposable en facteurs. Combien de nombres entiers peux-tu trouver dans chaque cas ?

a) $4s^2 + \square s + 3$ **b)** $4h^2 + \square h + 25$
c) $6y^2 + \square y - 9$ **d)** $12t^2 + \square t + 10$
e) $9z^2 + \square z + 1$ **f)** $\square f^2 + 2f + \square$

C

21. **a)** Décompose le trinôme en facteurs, si c'est possible.

I) $4r^2 - r - 5$ II) $2t^2 + 10t + 3$
III) $5y^2 + 4y - 2$ IV) $2w^2 - 5w + 2$
V) $3h^2 - 8h - 3$ VI) $2f^2 - f + 1$

b) Choisis deux trinômes en a) : un trinôme qui est décomposable en facteurs et un qui ne l'est pas. Explique pourquoi le premier trinôme est décomposable en facteurs, mais non le deuxième.

22. **a)** Décompose chaque trinôme en facteurs.

I) $3n^2 + 11n + 10$ II) $3n^2 - 11n + 10$
III) $3n^2 + 13n + 10$ IV) $3n^2 - 13n + 10$
V) $3n^2 + 17n + 10$ VI) $3n^2 - 17n + 10$

b) Examine les trinômes et leurs facteurs en a). Y a-t-il d'autres trinômes qui commencent par $3n^2$, se terminent par $+10$ et sont décomposables en facteurs ? Justifie ta réponse.

23. Indique tous les trinômes qui commencent par $9m^2$, se terminent par $+16$ et sont décomposables en facteurs.

Réfléchis

Quelles stratégies peux-tu utiliser pour décomposer un trinôme en facteurs ? Pour chaque stratégie, cite un exemple d'un cas où tu pourrais l'utiliser.

PAUSE VÉRIFICATION 2

Liens

Type de facteur	Régularités relatives aux facteurs et au produit	Exemple
monôme x polynôme	Le facteur monomial est le plus grand facteur commun des termes du polynôme.	$5x^2 - 10xy + 15x$ $= 5x(x - 2y + 3)$
$(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b)$ $= x^2 + (a + b)x + ab$	$(x + 2)(x - 8)$ $= x^2 + 2x - 8x - 16$ $= x^2 - 6x - 16$
$(ax + b)(cx + d)$	$(ax + b)(cx + d)$ $= (ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$	$(3x - 2)(2x + 5)$ $= 6x^2 - 4x + 15x - 10$ $= 6x^2 + 11x - 10$

Présentation des concepts

- **Dans la leçon 3.3,** tu as utilisé un modèle d'aire représentant le produit de nombres naturels afin de développer des modèles et des stratégies pour déterminer les **facteurs communs** des termes d'un polynôme.
- **Dans la leçon 3.4,** tu as **multiplié des binômes** et **décomposé des trinômes en facteurs** à l'aide de carreaux algébriques.
- **Dans la leçon 3.5,** tu as **multiplié des binômes** et **décomposé en facteurs des trinômes** de la forme $x^2 + bx + c$ à l'aide de schémas et de stratégies algébriques.
- **Dans la leçon 3.6,** tu as étendu les stratégies de la leçon 3.5 à la **multiplication de binômes** et à la **factorisation de trinômes** de la forme $ax^2 + bx + c$.

L'UNIVERS DES MATHS

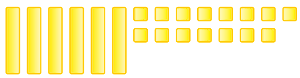
Le monde du travail : Infographiste

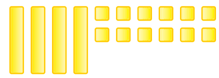
Si tu as joué à un jeu vidéo ou si tu as visionné un film récemment, tu as peut-être vu des effets spéciaux conçus par des infographistes. Pour créer une image dans un espace virtuel, ces artistes prennent des mesures à partir d'un modèle et effectuent de longs calculs afin de doter les objets d'une apparence et de mouvements réalistes à l'écran. Les infographistes utilisent leurs connaissances en algèbre et en géométrie pour créer des produits divertissants et visuellement attrayants.

Évalue ta compréhension

3.3

1. Pour chaque ensemble de carreaux algébriques, écris le polynôme représenté et détermine ses facteurs. Représente les facteurs à l'aide d'un rectangle.

a) 

b) 

2. **a)** Décompose chaque polynôme en facteurs. Utilise des carreaux algébriques quand c'est possible. Dessine les carreaux que tu utilises.

I) $4a + 8$
II) $3c - 6$
III) $-2v^2 - 5v$
IV) $2x^2 + 14x + 6$
V) $-3r^2 + 15r - 3$
VI) $15a^3 - 3a^2b - 6ab^2$
VII) $12 - 32x + 8x^2$
VIII) $12x^2y - 8xy - 16y$

b) Indique les polynômes en a) pour lesquels tu ne peux pas utiliser de carreaux algébriques. Explique pourquoi il est impossible d'en utiliser.

3.4

3. Utilise 1 carreau x^2. Ajoutes-y des carreaux x et des carreaux unitaires pour construire un rectangle. Dessine le rectangle et écris la multiplication qu'il représente.

4. Utilise 2 ou plusieurs carreaux x^2. Ajoutes-y des carreaux x et des carreaux unitaires pour construire un rectangle. Dessine le rectangle et écris la multiplication qu'il représente.

3.5

5. Développe et simplifie chaque produit. Représente-le à l'aide d'un modèle d'aire ou d'un schéma rectangulaire.

a) $(x + 1)(x + 4)$
b) $(d - 2)(d + 3)$
c) $(x - 4)(x - 2)$
d) $(5 - r)(6 + r)$
e) $(g + 5)(g - 1)$
f) $(2 - t)(10 - t)$

6. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier les facteurs.

a) $s^2 + 11s + 30$
b) $n^2 - n - 30$
c) $20 - 9b + b^2$
d) $-11 - 10t + t^2$
e) $z^2 + 13z + 30$
f) $-k^2 + 9k - 18$

7. Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $3x^2 + 15x - 42$
b) $-2y^2 + 22y - 48$
c) $-24 - 11m - m^2$
d) $50 - 23y - y^2$

3.6

8. Développe puis simplifie chaque produit.

a) $(2c + 1)(c + 3)$
b) $(-m + 5)(4m - 1)$
c) $(3f - 4)(3f + 1)$
d) $(6z - 1)(2z - 3)$
e) $(5 - 3r)(6 + 2r)$
f) $(-4 - 2h)(-2 - 4h)$

9. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier les facteurs.

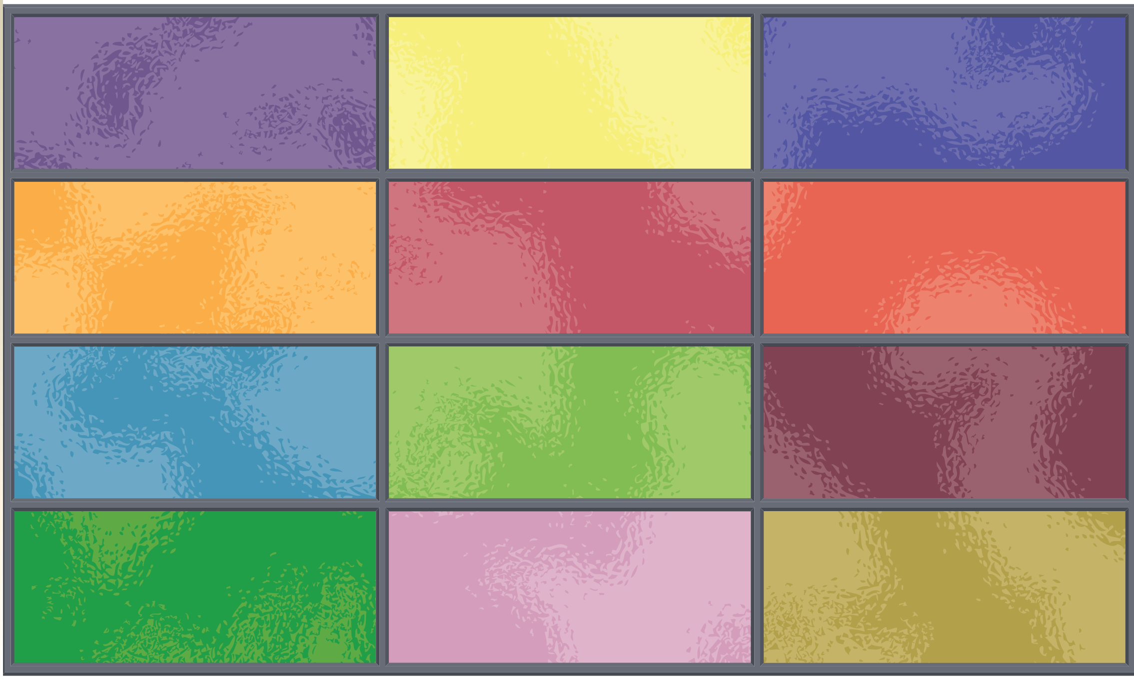
a) $2j^2 + 13j + 20$
b) $3v^2 + v - 10$
c) $5k^2 - 23k + 12$
d) $9h^2 + 18h + 8$
e) $8y^2 - 2y - 1$
f) $6 - 23u + 20u^2$

L'UNIVERS DES MATHS

Un peu d'histoire : François Viète

François Viète (1540-1603) était avocat. Il a travaillé à la cour des rois Henri III et Henri IV de France. En plus d'offrir des conseils juridiques, il était cryptographe et déchiffrait les messages interceptés entre des ennemis du roi. Toutefois, il s'intéressait surtout aux mathématiques. Il est l'une des premières personnes à avoir représenté des nombres par des lettres. Dans son ouvrage *Notes préliminaires sur la logique symbolique,* rédigé vers la fin du 16e siècle mais publié en 1631 seulement, il a montré comment effectuer des opérations sur des quantités symboliques et il a déduit bon nombre de résultats algébriques. Il a appliqué son algèbre à plusieurs branches des mathématiques et il a publié notamment des ouvrages sur la trigonométrie et l'algèbre. L'analyse des équations était son domaine de prédilection.

3.7 La multiplication de polynômes



OBJECTIF DE LA LEÇON

Étendre les stratégies de multiplication des binômes à la multiplication de polynômes.

Établis des liens

L'œuvre d'art ci-dessus a été conçue pour un vitrail. Comment peux-tu déterminer l'aire du grand rectangle à partir de la longueur et de la largeur de chaque petit rectangle, mais sans d'abord déterminer la longueur et la largeur du grand rectangle ?

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille avec une ou un camarade.

- Trace un schéma rectangulaire pour déterminer le produit $(a + b + 2)(c + d + 3)$.
- Trace un schéma rectangulaire pour déterminer le produit $(a - b + 2)(c + d - 3)$.
- Vérifie les produits à l'aide d'une stratégie différente.

Le produit serait-il différent si tu changeais l'ordre des facteurs ? Justifie ta réponse.

La distributivité permet d'effectuer n'importe quelle multiplication de polynômes. Il faut multiplier chaque terme d'un polynôme par chaque terme de l'autre polynôme.

Exemple 1 Multiplier deux polynômes en appliquant la distributivité

Développe et simplifie chaque expression.

a) $(2h + 5)(h^2 + 3h - 4)$ **b)** $(-3f^2 + 3f - 2)(4f^2 - f - 6)$

SOLUTION

a) Applique la distributivité. Multiplie chaque terme du trinôme par chaque terme du binôme.
Écris tous les termes.

$$\begin{aligned}
&(2h + 5)(h^2 + 3h - 4)\\
&= (2h)(h^2 + 3h - 4) + 5(h^2 + 3h - 4)\\
&= (2h)(h^2) + (2h)(3h) + 2h(-4) + 5(h^2) + 5(3h) + 5(-4)\\
&= 2h^3 + 6h^2 - 8h + 5h^2 + 15h - 20\\
&= 2h^3 + 6h^2 + 5h^2 - 8h + 15h - 20\\
&= 2h^3 + 11h^2 + 7h - 20
\end{aligned}$$

Regroupe les termes semblables.

b) Applique la distributivité. Multiplie chaque terme du premier trinôme par chaque terme du second trinôme.
Aligne les termes semblables.

$$\begin{array}{lrrrrr}
(-3f^2 + 3f - 2)(4f^2 - f - 6): & & & & & \\
-3f^2(4f^2 - f - 6): & -12f^4 & +\ 3f^3 & +\ 18f^2 & & \\
3f(4f^2 - f - 6): & & 12f^3 & -\ 3f^2 & -\ 18f & \\
-2(4f^2 - f - 6): & & & -8f^2 & +\ 2f & +\ 12 \\
\hline
\text{Effectue l'addition :} & -12f^4 & +\ 15f^3 & +\ 7f^2 & -\ 16f & +\ 12
\end{array}$$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Développe et simplifie chaque expression.

a) $(3k + 4)(k^2 - 2k - 7)$

b) $(-2t^2 + 4t - 3)(5t^2 - 2t + 1)$

[Réponses : a) $3k^3 - 2k^2 - 29k - 28$; b) $-10t^4 + 24t^3 - 25t^2 + 10t - 3$]

Les solutions en a) et en b) font toutes les deux appel à la distributivité. Quelle stratégie préfères-tu pour écrire les produits des termes ? Pourquoi ?

Une façon de vérifier si un produit est vraisemblablement exact consiste à substituer un nombre à la variable dans le produit de départ et dans sa simplification. Si les deux expressions sont égales, le produit est vraisemblablement exact. Dans la partie a) de l'exemple 1, substitue 1 à h.

$$(2h + 5)(h^2 + 3h - 4) = 2h^3 + 11h^2 + 7h - 20$$

Membre de gauche : $(2h + 5)(h^2 + 3h - 4) = [2(1) + 5][(1)^2 + 3(1) - 4]$
$= (7)(0)$
$= 0$

Membre de droite : $2h^3 + 11h^2 + 7h - 20 = 2(1)^3 + 11(1)^2 + 7(1) - 20$
$= 2 + 11 + 7 - 20$
$= 0$

Étant donné que le membre de gauche est égal à celui de droite, le produit est vraisemblablement exact.

Dans la partie b) de l'exemple 1, substitue 1 à f.

$(-3f^2 + 3f - 2)(4f^2 - f - 6) = -12f^4 + 15f^3 + 7f^2 - 16f + 12$

Membre de gauche : $(-3f^2 + 3f - 2)(4f^2 - f - 6)$

$= [(-3)(1)^2 + 3(1) - 2)]\ [(4(1)^2 - (1) - 6]$

$= (-2)(-3)$

$= 6$

Membre de droite : $-12f^4 + 15f^3 + 7f^2 - 16f + 12$

$= -12(1)^4 + 15(1)^3 + 7(1)^2 - 16(1) + 12$

$= -12 + 15 + 7 - 16 + 12$

$= 6$

Étant donné que le membre de gauche est égal à celui de droite, le produit est vraisemblablement exact.

Exemple 2 Multiplier des polynômes à deux ou plusieurs variables

Développe et simplifie chaque expression.

a) $(2r + 5t)^2$ **b)** $(3x - 2y)(4x - 3y + 5)$

SOLUTION

a) $(2r + 5t)^2 = (2r + 5t)(2r + 5t)$

$= 2r(2r + 5t) + 5t(2r + 5t)$

$= 2r(2r) + 2r(5t) + 5t(2r) + 5t(5t)$

$= 4r^2 + 10rt + 10rt + 25t^2$ Regroupe les termes semblables.

$= 4r^2 + 20rt + 25t^2$

b) $(3x - 2y)(4x - 3y + 5)$

$= 3x(4x - 3y - 5) - 2y(4x - 3y + 5)$

$= 3x(4x) + 3x(-3y) + 3x(-5) - 2y(4x) - 2y(-3y) - 2y(5)$

$= 12x^2 - 9xy - 15x - 8xy + 6y^2 - 10y$ Fais ressortir les termes semblables.

$= 12x^2 - 9xy - 8xy - 15x + 6y^2 - 10y$ Regroupe les termes semblables.

$= 12x^2 - 17xy - 15x + 6y^2 - 10y$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Développe et simplifie chaque expression.

a) $(4k - 3m)^2$

b) $(2v - 5w)(3v + 2w - 7)$

[Réponses : a) $16k^2 - 24km + 9m^2$; b) $6v^2 - 11vw - 14v - 10w^2 + 35w$]

Examine les facteurs et le produit en a). Comment pourrais-tu écrire le produit sans appliquer la distributivité ?

Exemple 3 Simplifier des sommes et des différences de produits de polynômes

Développe et simplifie chaque expression.

a) $(2c - 3)(c + 5) + 3(c - 3)(-3c + 1)$

b) $(3x + y - 1)(2x - 4) - (3x + 2y)^2$

SOLUTION

Utilise la priorité des opérations. Effectue les multiplications avant les additions et les soustractions. Ensuite, regroupe les termes semblables.

a) $(2c - 3)(c + 5) + 3(c - 3)(-3c + 1)$

$= 2c(c + 5) - 3(c + 5) + 3[c(-3c + 1) - 3(-3c + 1)]$

$= 2c^2 + 10c - 3c - 15 + 3[-3c^2 + c + 9c - 3]$

$= 2c^2 + 7c - 15 + 3[-3c^2 + 10c - 3]$

$= 2c^2 + 7c - 15 - 9c^2 + 30c - 9$

$= -7c^2 + 37c - 24$

b) $(3x + y - 1)(2x - 4) - (3x + 2y)^2$

$= 3x(2x - 4) + y(2x - 4) - 1(2x - 4) - (3x + 2y)(3x + 2y)$

$= 6x^2 - 12x + 2xy - 4y - 2x + 4 -$
$[3x(3x + 2y) + 2y(3x + 2y)]$

$= 6x^2 - 14x + 2xy - 4y + 4 - [9x^2 + 6xy + 6xy + 4y^2]$

$= 6x^2 - 14x + 2xy - 4y + 4 - [9x^2 + 12xy + 4y^2]$

$= 6x^2 - 14x + 2xy - 4y + 4 - 9x^2 - 12xy - 4y^2$

$= -3x^2 - 14x - 10xy - 4y + 4 - 4y^2$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Développe et simplifie chaque expression.

a) $(4m + 1)(3m - 2)$
$+ 2(2m - 1)(-3m + 4)$

b) $(6h + k - 2)(2h - 3)$
$- (4h - 3k)^2$

[Réponses : a) $17m - 10$;
b) $-4h^2 - 22h + 26hk - 3k + 6 - 9k^2$]

Place à la discussion

1. Quelles sont les ressemblances entre la multiplication de polynômes à plus de 2 termes et la multiplication de binômes ? Quelles sont les différences ?

2. Quelles stratégies peux-tu utiliser pour vérifier si tu as correctement multiplié deux polynômes ?

3. Quand tu substitues un nombre à une variable afin de vérifier si un produit de polynômes est exact, est-il approprié d'utiliser le nombre 0 ? Est-il approprié d'utiliser le nombre 9 ? Justifie ta réponse.

Exercices

A

4. Développe et simplifie chaque expression.
  a) $(g + 1)(g^2 + 2g + 3)$
  b) $(2 + t + t^2)(1 + 3t + t^2)$
  c) $(2w + 3)(w^2 + 4w + 7)$
  d) $(4 + 3n + n^2)(3 + 5n + n^2)$

5. Développe et simplifie chaque expression.
  a) $(2z + y)(3z + y)$
  b) $(4f - 3g)(3f - 4g + 1)$
  c) $(2a + 3b)(4a + 5b)$
  d) $(3a - 4b + 1)(4a - 5b)$
  e) $(2r + s)^2$
  f) $(3t - 2u)^2$

B

6. **a)** Développe et simplifie chaque expression.
  I) $(2x + y)(2x + y)$
  II) $(5r + 2s)(5r + 2s)$
  III) $(6c + 5d)(6c + 5d)$
  IV) $(5v + 7w)(5v + 7w)$
  V) $(2x - y)(2x - y)$
  VI) $(5r - 2s)(5r - 2s)$
  VII) $(6c - 5d)(6c - 5d)$
  VIII) $(5v - 7w)(5v - 7w)$
 b) Quelles régularités vois-tu dans les facteurs et les produits en a) ? À l'aide de ces régularités, développe chaque produit et simplifie-le sans appliquer la distributivité.
  I) $(p + 3q)(p + 3q)$
  II) $(2s - 7t)(2s - 7t)$
  III) $(5g + 4h)(5g + 4h)$
  IV) $(10h - 7k)(10h - 7k)$

7. **a)** Développe et simplifie chaque expression.
  I) $(x + 2y)(x - 2y)$
  II) $(3r - 4s)(3r + 4s)$
  III) $(5c + 3d)(5c - 3d)$
  IV) $(2v - 7w)(2v + 7w)$
 b) Quelles régularités vois-tu dans les facteurs et les produits en a) ? À l'aide de ces régularités, développe chaque produit et simplifie-le sans appliquer la distributivité.
  I) $(11g + 5h)(11g - 5h)$
  II) $(25m - 7n)(25m + 7n)$

8. Développe et simplifie chaque expression.
  a) $(3y - 2)(y^2 + y - 8)$
  b) $(4r + 1)(r^2 - 2r - 3)$
  c) $(b^2 + 9b - 2)(2b - 1)$
  d) $(x^2 + 6x + 1)(3x - 7)$

9. Développe et simplifie chaque expression.
  a) $(x + y)(x + y + 3)$
  b) $(x + 2)(x + y + 1)$
  c) $(a + b)(a + b + c)$
  d) $(3 + t)(2 + t + s)$

10. Développe et simplifie chaque expression.
  a) $(x + 2y)(x - 2y - 1)$
  b) $(2c - 3d)(c + d + 1)$
  c) $(a - 5b)(a + 2b - 4)$
  d) $(p - 2q)(p + 4q - r)$

11. Trouve et corrige toute erreur.
$$\begin{aligned} &(2r - 3s)(r - 5s + 6) \\ &= 2r(r - 5s + 6) - 3s(r - 5s + 6) \\ &= 2r^2 - 5rs + 12r - 3rs - 15s^2 - 18s \\ &= 2r^2 - 8rs + 12r - 33s^2 \end{aligned}$$

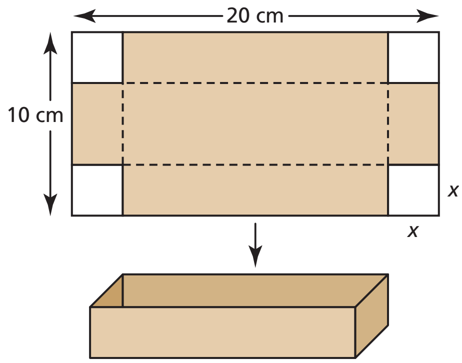
12. L'aire de la base rectangulaire d'un prisme droit est de $x^2 + 3x + 2$. Le prisme a une hauteur de $x + 7$. Écris une expression pour représenter le volume du prisme, puis simplifie-la.

13. Développe puis simplifie chaque expression. Substitue un nombre à la variable pour vérifier le produit.
  a) $(r^2 + 3r + 2)(4r^2 + r + 1)$
  b) $(2d^2 + 2d + 1)(d^2 + 6d + 3)$
  c) $(4c^2 - 2c - 3)(-c^2 + 6c + 2)$
  d) $(-4n^2 - n + 3)(-2n^2 + 5n - 1)$

14. Trouve et corrige toute erreur.
$$\begin{aligned} &(3g^2 + 4g - 2)(-g^2 - g + 4) \\ &= -3g^4 - 3g^3 + 12g^2 - 4g^3 + 4g^2 + 8g \\ &\quad + 2g^2 + 2g + 8 \\ &= -3g^4 + 5g^3 + 6g^2 + 10g + 8 \end{aligned}$$

15. Développe et simplifie chaque expression.
  a) $(3s + 5)(2s + 2) + (3s + 7)(s + 6)$
  b) $(2x + 3)(5x + 4) + (x - 4)(3x - 7)$
  c) $(3m + 4)(m - 4n) + (5m - 2)(3m - 6n)$
  d) $(4y - 5)(3y + 2) - (3y + 2)(4y - 5)$
  e) $(3x - 2)^2 - (2x + 6)(3x - 1)$
  f) $(2a + 1)(4a - 3) - (a - 2)^2$

16. On fabrique une boîte sans couvercle à partir d'un carton de 20 cm sur 10 cm. Pour cela, on découpe un carré congruent dans chaque coin et on plie les bords.

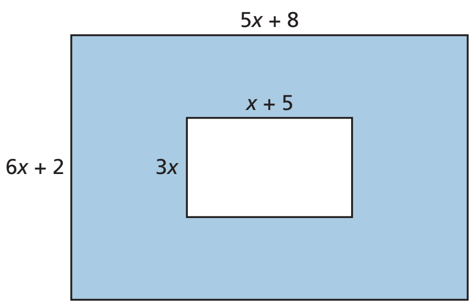


Soit x, la longueur de côté, en centimètres, de chaque carré découpé. Écris un polynôme pour représenter chaque dimension. Simplifie chaque polynôme.

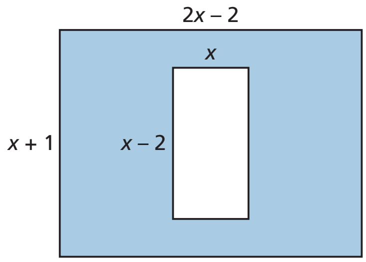
a) la longueur de la boîte
b) la largeur de la boîte
c) l'aire de la base de la boîte
d) le volume de la boîte

17. Chaque figure est un rectangle. Écris un polynôme pour représenter l'aire de la région ombrée.
Simplifie chaque polynôme.

a)



b)



C

18. Développe et simplifie chaque expression.
a) $(x - 2)^3$ **b)** $(2y + 5)^3$
c) $(4a - 3b)^3$ **d)** $(c + d)^3$

19. Développe et simplifie chaque expression.
a) $2a(2a - 1)(3a + 2)$
b) $-3r(r - 1)(2r + 1)$
c) $5x^2(2x - 1)(4x - 3)$
d) $-xy(2x + 5)(4x - 5)$
e) $2b(2b - c)(b + c)$
f) $y^2(y^2 + 1)(y^2 - 1)$

20. La longueur d'arête d'un cube mesure $2x + 3$.
a) Écris une expression pour représenter le volume du cube, puis simplifie-la.
b) Écris une expression pour représenter l'aire totale du cube, puis simplifie-la.

21. Développe et simplifie chaque expression.
a) $(3x + 4)(x - 5)(2x + 8)$
b) $(b - 7)(b + 8)(3b - 4)$
c) $(2x - 5)(3x + 4)^2$
d) $(5a - 3)^2(2a - 7)$
e) $(2k - 3)(2k + 3)^2$

22. Développe et simplifie chaque expression.
a) $(x + y + 1)^3$
b) $(x - y - 1)^3$
c) $(x + y + z)^3$
d) $(x - y - z)^3$

Réfléchis

Quelles stratégies connais-tu pour multiplier deux binômes ? Comment peux-tu utiliser ou adapter ces stratégies pour multiplier deux trinômes ? Inclus des exemples.

3.8 Décomposer des polynômes particuliers en facteurs

OBJECTIF DE LA LEÇON

Explorer les régularités dans des cas particuliers de décomposition en facteurs.

Établis des liens

L'aire d'une parcelle de terrain carrée est de 1 hectare (1 ha).

$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$

Donc, la longueur d'un côté de la parcelle est $\sqrt{10\,000} = 100$ m.

La longueur de côté de la parcelle de terrain augmente de x mètres.
Quel binôme représente la longueur de côté de la parcelle, en mètres ?
Quel trinôme représente l'aire de la parcelle, en mètres carrés ?

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille avec une ou un camarade.

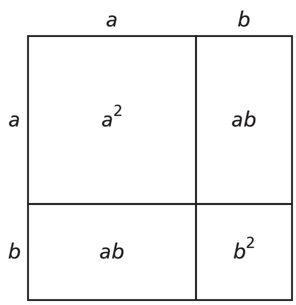
Tu peux avoir besoin de carreaux algébriques.

- Détermine chaque produit.

$(x + 1)^2$	$(x + 2)^2$	$(x + 3)^2$
$(x - 1)^2$	$(x - 2)^2$	$(x - 3)^2$
$(2x + 1)^2$	$(3x + 1)^2$	$(4x + 1)^2$
$(2x - 1)^2$	$(3x - 1)^2$	$(4x - 1)^2$

- Quelles régularités y a-t-il dans les trinômes et leurs facteurs? Comment peux-tu utiliser ces régularités pour décomposer les trinômes suivants en facteurs?
  $4x^2 + 20x + 25$ $\qquad$ $9x^2 - 12x + 4$
- Écris deux autres polynômes qui présentent la même régularité, puis décompose-les en facteurs.
  Établis une stratégie pour la décomposition en facteurs de ce type de polynôme.

Voici un carré dont la longueur de côté est $a + b$.



$$\begin{aligned}\text{Son aire est } (a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &= a(a + b) + b(a + b)\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Le polynôme $a^2 + 2ab + b^2$ est un **trinôme carré parfait.**

le carré du premier terme du binôme

deux fois le produit du premier et du deuxième terme du binôme

le carré du deuxième terme du binôme

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Un trinôme carré parfait

Le modèle d'aire d'un trinôme carré parfait est un carré.

Sous la forme d'un produit de facteurs,
un trinôme carré parfait $a^2 + 2ab + b^2$ s'écrit
$(a + b)(a + b)$, ou $(a + b)^2$,

et un trinôme carré parfait $a^2 - 2ab + b^2$ s'écrit
$(a - b)(a - b)$, ou $(a - b)^2$.

Tu peux utiliser ces régularités pour décomposer des trinômes carrés parfaits en facteurs.

Exemple 1 Décomposer en facteurs un trinôme carré parfait

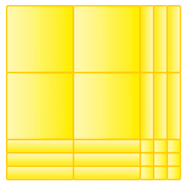
Décompose chaque trinôme en facteurs. Multiplie les facteurs pour vérifier la réponse.

a) $4x^2 + 12x + 9$ **b)** $4 - 20x + 25x^2$

SOLUTION

a) $4x^2 + 12x + 9$

Forme un rectangle avec des carreaux algébriques.



Ce rectangle est un carré dont la longueur de côté est $2x + 3$.

$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$

Pour vérifier, effectue la multiplication :

$$\begin{aligned}(2x + 3)(2x + 3) &= 2x(2x + 3) + 3(2x + 3)\\ &= 4x^2 + 6x + 6x + 9\\ &= 4x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

Puisque tu obtiens le trinôme de départ, les facteurs sont exacts.

b) $4 - 20x + 25x^2$

Le premier terme est un carré parfait, car $4 = (2)(2)$.
Le troisième terme est un carré parfait, car $25x^2 = (5x)(5x)$.
Le deuxième terme est le double du produit de $5x$ et de 2 :
$20x = 2(5x)(2)$.

Étant donné que le deuxième terme est négatif, les opérations à l'intérieur des facteurs binomiaux doivent être des soustractions.

Le trinôme est donc un carré parfait et ses facteurs sont :
$(2 - 5x)(2 - 5x)$, ou $(2 - 5x)^2$

Pour vérifier la réponse, effectue la multiplication :

$$\begin{aligned}(2 - 5x)(2 - 5x) &= 2(2 - 5x) - 5x(2 - 5x)\\ &= 4 - 10x - 10x + 25x^2\\ &= 4 - 20x + 25x^2\end{aligned}$$

Puisque tu obtiens le trinôme de départ, les facteurs sont exacts.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Décompose chaque trinôme en facteurs. Multiplie les facteurs pour vérifier la réponse.

a) $36x^2 + 12x + 1$

b) $16 - 56x + 49x^2$

[Réponses : a) $(6x + 1)^2$; b) $(4 - 7x)^2$]

Si $ax^2 + bx + c$ est un trinôme carré parfait, quelle est la relation entre a, b et c ?

Dans la leçon 3.7, tu as multiplié deux binômes à deux variables. Il est possible de décomposer des trinômes de cette forme en faisant le processus réciproque. Tu peux utiliser le raisonnement logique ou la méthode de la somme et du produit.

Exemple 2 Décomposer en facteurs des trinômes à deux variables

Décompose chaque trinôme en facteurs. Multiplie les facteurs pour vérifier la réponse.

a) $2a^2 - 7ab + 3b^2$ **b)** $10c^2 - cd - 2d^2$

SOLUTION

a) $2a^2 - 7ab + 3b^2$

Utilise le raisonnement logique. Puisque le troisième terme du trinôme est positif, les opérations à l'intérieur des facteurs binomiaux sont les mêmes. Étant donné que le deuxième terme est négatif, ces opérations seront des soustractions.

Les deux binômes seront de la forme $(?a - ?b)(?a - ?b)$.

Énumère les facteurs possibles de $2a^2$ et de $3b^2$, puis détermine la combinaison de produits dont la somme est $-7ab$ à l'aide de la stratégie Prédire et vérifier.

$$\begin{array}{ll} 1a & -1b \\ 2a & -3b \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1a & -3b \\ 2a & -1b \end{array}$$

Écris les produits, puis additionne-les.

$-3ab - 2ab = -5ab$ $\quad -1ab - 6ab = -7ab \leftarrow$ Ceci est la bonne combinaison de facteurs.

Ainsi, $2a^2 - 7ab + 3b^2 = (2a - b)(a - 3b)$

Pour vérifier la réponse, effectue la multiplication :

$$\begin{aligned} (2a - b)(a - 3b) &= 2a(a - 3b) - b(a - 3b) \\ &= 2a^2 - 6ab - ab + 3b^2 \\ &= 2a^2 - 7ab + 3b^2 \end{aligned}$$

Puisque tu obtiens le trinôme de départ, les facteurs sont exacts.

b) $10c^2 - cd - 2d^2$

Applique la méthode de la somme et du produit. Puisque le troisième terme est négatif, les opérations à l'intérieur des facteurs binomiaux seront une addition et une soustraction.

Les deux binômes seront de la forme $(?c + ?d)(?c - ?d)$.

Le produit des coefficients de c^2 et de d^2 est $10(-2) = -20$.

Écris donc $-1cd$ sous la forme de la somme de deux termes dont les coefficients ont un produit de -20.

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Décompose chaque trinôme en facteurs. Multiplie les facteurs pour vérifier la réponse.

a) $5c^2 - 13cd + 6d^2$

b) $3p^2 - 5pq - 2q^2$

[Réponses : a) $(5c - 3d)(c - 2d)$; b) $(3p + q)(p - 2q)$]

Facteurs de -20	Somme des facteurs
$1, -20$	$1 - 20 = -19$
$-1, 20$	$-1 + 20 = 19$
$2, -10$	$2 - 10 = -8$
$-2, 10$	$-2 + 10 = 8$
$4, -5$	$4 - 5 = -1$
$-4, 5$	$-4 + 5 = 1$

Les deux coefficients sont 4 et -5 ; écris donc le trinôme $10c^2 - cd - 2d^2$ sous la forme $10c^2 + 4cd - 5cd - 2d^2$.

Mets en évidence un facteur commun des deux premiers termes et un facteur commun des deux derniers termes :

$10c^2 + 4cd - 5cd - 2d^2 = 2c(5c + 2d) - d(5c + 2d)$

Mets en évidence le facteur binomial commun.

Ainsi, $10c^2 - cd - 2d^2 = (5c + 2d)(2c - d)$

Pour vérifier la réponse, effectue la multiplication :

$$\begin{aligned}(5c + 2d)(2c - d) &= 5c(2c - d) + 2d(2c - d)\\ &= 10c^2 - 5cd + 4cd - 2d^2\\ &= 10c^2 - cd - 2d^2\end{aligned}$$

Puisque tu obtiens le trinôme de départ, les facteurs sont exacts.

Une **différence de carrés** est un autre type particulier de polynôme.

Une différence de carrés est un binôme de la forme $a^2 - b^2$.

Tu peux la considérer comme un trinôme dont le terme du milieu est 0.

Ainsi, pour $a^2 - b^2$, tu peux écrire $a^2 + 0ab - b^2$.

Soit le binôme $x^2 - 25$.

Il s'agit d'une différence de carrés parce que $x^2 = (x)(x)$ et $25 = (5)(5)$.

Écris $x^2 - 25$ sous la forme $x^2 - 0x - 25$.

Pour décomposer ce trinôme en facteurs, trouve 2 nombres entiers dont le produit est -25 et dont la somme est 0.

Ces deux nombres entiers sont 5 et -5.

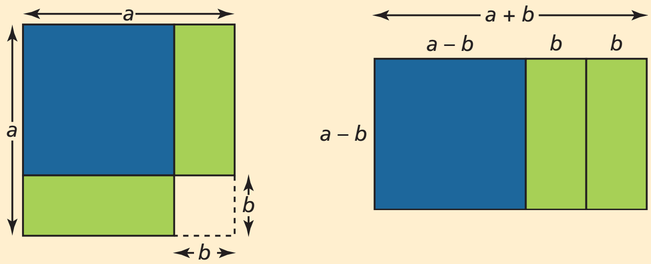
Par conséquent, $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

Cette régularité est vraie pour toute différence de deux carrés.

Une différence de carrés

Une différence de carrés est de la forme $a^2 - b^2$.

Sous la forme d'un produit de facteurs, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.



Exemple 3 Décomposer en facteurs une différence de carrés

Décompose chaque binôme en facteurs.

a) $25 - 36x^2$ **b)** $5x^4 - 80y^4$

SOLUTION

a) $25 - 36x^2$

Écris chaque terme sous la forme d'un carré parfait.

$$25 - 36x^2 = (5)^2 - (6x)^2$$

Écris ces termes sous la forme de facteurs binomiaux.

$$= (5 + 6x)(5 - 6x)$$

b) $5x^4 - 80y^4$

Sous leur forme actuelle, les termes du binôme ne sont pas des carrés parfaits. En revanche, ils ont un facteur commun, 5. Mets ce facteur commun en évidence.

$$5x^4 - 80y^4$$

$$= 5(x^4 - 16y^4)$$

Écris maintenant chaque terme du binôme sous la forme d'un carré parfait.

$$= 5[(x^2)^2 - (4y^2)^2]$$

Écris ces termes sous la forme de facteurs binomiaux.

$$= 5(x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2)$$

Le premier binôme est aussi une différence de carrés.

$$= 5(x + 2y)(x - 2y)(x^2 + 4y^2)$$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Décompose chaque binôme en facteurs.

a) $81m^2 - 49$

b) $162v^4 - 2w^4$

[Réponses : a) $(9m - 7)(9m + 7)$; b) $2(3v - w)(3v + w)(9v^2 + w^2)$]

Une somme de carrés est-elle décomposable en facteurs ? Justifie ta réponse.

Place à la discussion

1. Comment les modèles d'aire et les schémas rectangulaires viennent-ils appuyer les noms donnés au trinôme carré parfait et à la différence de carrés ?
2. Pourquoi est-il utile de reconnaître les régularités dans la décomposition en facteurs des trinômes carrés parfaits et des différences de carrés ?
3. Pourquoi peux-tu utiliser les facteurs d'un trinôme à une variable pour décomposer en facteurs un trinôme à deux variables correspondant ?

Exercices

A

4. Développe et simplifie chaque expression.

a) $(x + 2)^2$ **b)** $(3 - y)^2$
c) $(5 + d)^2$ **d)** $(7 - f)^2$
e) $(x + 2)(x - 2)$ **f)** $(3 - y)(3 + y)$
g) $(5 + d)(5 - d)$ **h)** $(7 - f)(7 + f)$

5. Pour chaque polynôme, détermine s'il s'agit d'un trinôme carré parfait, d'une différence de carrés, ou de ni l'un ni l'autre.

a) $25 - t^2$
b) $16m^2 + 49n^2$
c) $4x^2 - 24xy + 9y^2$
d) $9m^2 - 24mn + 16n^2$

6. Décompose chaque binôme en facteurs.

a) $x^2 - 49$ **b)** $b^2 - 121$
c) $1 - q^2$ **d)** $36 - c^2$

B

7. **a)** Décompose chaque trinôme en facteurs.

i) $a^2 + 10a + 25$ ii) $b^2 - 12b + 36$
iii) $c^2 + 14c + 49$ iv) $d^2 - 16d + 64$
v) $e^2 + 18e + 81$ vi) $f^2 - 20f + 100$

b) Quelles régularités vois-tu dans les trinômes et leurs facteurs en a) ? Écris les 4 prochains trinômes de la régularité et leurs facteurs.

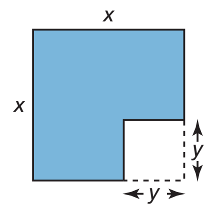
8. Décompose chaque trinôme en facteurs. Multiplie les facteurs pour vérifier la réponse.

a) $4x^2 - 12x + 9$ **b)** $9 + 30n + 25n^2$
c) $81 - 36v + 4v^2$ **d)** $25 + 40h + 16h^2$
e) $9g^2 + 48g + 64$ **f)** $49r^2 - 28r + 4$

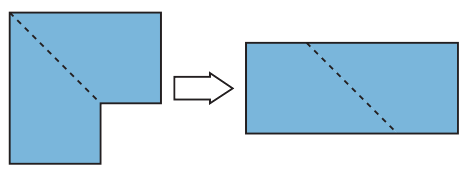
9. **a)** Découpe un carré dans une feuille de papier. Soit x, la longueur de côté du carré. Écris une expression pour représenter l'aire du carré.

Découpe un petit carré dans un coin du carré de départ. Soit y, la longueur de côté du petit carré. Écris une expression pour représenter l'aire du petit carré.

Écris une expression pour représenter l'aire de la partie restante du grand carré.



b) Reproduis et découpe cette forme en L. Coupe-la en deux parties congruentes et dispose ces parties comme dans l'illustration.



Quelles sont les dimensions de ce rectangle, en fonction de x et de y ?
Quelle est l'aire du rectangle ?

c) Explique de quelle manière les résultats que tu as obtenus en a) et en b) illustrent une différence de carrés.

10. Décompose chaque binôme en facteurs. Multiplie les facteurs pour vérifier la réponse.

a) $9d^2 - 16f^2$
b) $25s^2 - 64t^2$
c) $144a^2 - 9b^2$
d) $121m^2 - n^2$
e) $81k^2 - 49m^2$
f) $100y^2 - 81z^2$
g) $v^2 - 36t^2$
h) $4j^2 - 225h^2$

11. Décompose chaque trinôme en facteurs.

a) $y^2 + 7yz + 10z^2$
b) $4w^2 - 8wx - 21x^2$
c) $12s^2 - 7su + u^2$
d) $3t^2 - 7tv + 4v^2$
e) $10r^2 + 9rs - 9s^2$
f) $8p^2 + 18pq - 35q^2$

12. Décompose chaque trinôme en facteurs. Lesquels sont des trinômes carrés parfaits ?

a) $4x^2 + 28xy + 49y^2$
b) $15m^2 + 7mn - 4n^2$
c) $16r^2 + 8rt + t^2$
d) $9a^2 - 42ab + 49b^2$
e) $12h^2 + 25hk + 12k^2$
f) $15f^2 - 31fg + 10g^2$

13. Décompose chaque polynôme en facteurs.

a) $8m^2 - 72n^2$
b) $8z^2 + 8yz + 2y^2$
c) $12x^2 - 27y^2$
d) $8p^2 + 40pq + 50q^2$
e) $-24u^2 - 6uv + 9v^2$
f) $-18b^2 + 128c^2$

14. Une fontaine circulaire a un rayon de *r* centimètres. Elle est entourée d'un massif fleuri circulaire d'un rayon de *R* centimètres (du centre de la fontaine).

a) Esquisse un schéma annoté.
b) Comment peux-tu déterminer une expression pour représenter l'aire du massif fleuri à l'aide d'une différence de carrés ?
c) Détermine l'aire du massif fleuri à l'aide de l'expression que tu as déterminée en b), sachant que $r = 150$ cm et $R = 350$ cm.

15. a) Remplace chaque □ par un nombre entier pour faire de chaque trinôme un carré parfait.

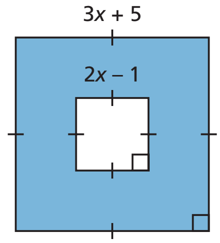
I) $x^2 + \square x + 49$
II) $4a^2 + 20ab + \square b^2$
III) $\square c^2 - 24cd + 16d^2$

b) Combien de nombres entiers peux-tu trouver pour chaque trinôme en a) ? Explique pourquoi il n'y en a pas d'autres.

16. Trouve trois nombres entiers consécutifs, *a*, *b* et *c*, qui rendent le trinôme $ax^2 + bx + c$ décomposable en facteurs. Combien de possibilités peux-tu trouver ?

17. Détermine (199)(201) à l'aide du calcul mental. Explique ta stratégie.

18. Détermine l'aire de la région ombrée. Simplifie ta réponse.



C

19. a) Pour chaque expression, détermine s'il s'agit d'un trinôme carré parfait, d'une différence de carrés, ou de ni l'un ni l'autre. Justifie tes réponses.

I) $(x^2 + 5)^2$
II) $-100 + r^2$
III) $81a^2b^2 - 1$
IV) $16s^4 + 8s^2 + 1$

b) Quelles expressions en a) sont décomposables en facteurs ? Décompose ces expressions.

20. Décompose complètement chaque trinôme.

a) $x^4 - 13x^2 + 36$
b) $a^4 - 17a^2 + 16$
c) $y^4 - 5y^2 + 4$

21. Décompose chaque expression en facteurs si cela est possible. Donne une justification pour chaque binôme qui n'est pas décomposable en facteurs.

a) $8d^2 - 32e^2$
b) $25m^2 - \frac{1}{4}n^2$
c) $18x^2y^2 - 50y^4$
d) $25s^2 + 49t^2$
e) $10a^2 - 7b^2$
f) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{49}$

Réfléchis

Explique en quoi une différence de carrés représente un type particulier de trinôme. Quelles sont les ressemblances entre la décomposition en facteurs d'une différence de carrés et celle d'un trinôme ? Quelles sont les différences ? Cite des exemples.

AIDE-MÉMOIRE

RÉSUMÉ DES CONCEPTS

Concepts clés	Applications
■ Les opérations arithmétiques sur les polynômes sont basées sur les opérations arithmétiques sur les nombres entiers, et elles possèdent des propriétés semblables.	Ce que cela signifie en pratique : ■ On peut déterminer des facteurs et des multiples pour des nombres naturels et pour des polynômes.
■ La multiplication et la décomposition en facteurs (factorisation) sont des processus réciproques, et on peut les représenter à l'aide d'un schéma rectangulaire.	■ La multiplication des facteurs permet de déterminer leur produit. ■ Les facteurs des trinômes peuvent être des termes constants, des monômes, des binômes ou des trinômes. Multiplier ces facteurs équivaut à développer l'expression. ■ Décomposer un polynôme en facteurs consiste à l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs. ■ On peut représenter un produit de polynômes à l'aide de carreaux algébriques ou d'un schéma rectangulaire.

Retour sur le chapitre

- Décris les ressemblances entre l'addition, la soustraction et la multiplication de nombres naturels et ces opérations sur les polynômes. Cite des exemples.
- Explique comment tu peux multiplier et décomposer en facteurs des nombres naturels ainsi que des polynômes à l'aide d'un schéma rectangulaire. Pourquoi un schéma rectangulaire permet-il d'effectuer ces deux opérations ?

RÉSUMÉ DES HABILETÉS

Habiletés	Description	Exemple
Déterminer les facteurs premiers, le plus grand facteur commun (PGFC) et le plus petit commun multiple (PPCM). [3.1]	Écrire un nombre naturel sous la forme du produit de ses facteurs premiers, à l'aide de puissances quand c'est possible. Déterminer le PGFC et le PPCM à l'aide des facteurs premiers.	Sous la forme d'un produit de facteurs premiers, $64 = 2^6$ et $80 = 2^4 \cdot 5$. Le PGFC de 64 et de 80 est $2^4 = 16$. Le PPCM de 64 et de 80 est $2^6 \cdot 5 = 320$.
Déterminer si un nombre est un carré parfait ou un cube parfait. [3.2]	Reconnaître des carrés parfaits et des cubes parfaits à l'aide des facteurs premiers.	$4\,225 = 5^2 \cdot 13^2$ Puisque les facteurs se présentent par paires, 4 225 est un carré parfait et $\sqrt{4\,225}$ égale $5 \cdot 13$, ou 65. Puisque les facteurs ne se présentent pas en groupes de trois, 4 225 n'est pas un cube parfait.
Déterminer les facteurs communs d'un polynôme. [3.3]	Examiner les termes et déterminer leur plus grand facteur commun. Multiplier les facteurs pour vérifier le PGFC.	$3x^2y - 21xy + 30y^2$ $= 3y(x^2 - 7x + 10y)$
Multiplier des binômes de la forme $(x + a)(x + b)$ et $(ax + b)(cx + d)$. [3.4, 3.5, 3.6]	Multiplier des binômes à l'aide de carreaux algébriques, de schémas et de la distributivité.	$(3d + 2)(4d - 5)$ $= 12d^2 - 15d + 8d - 10$ $= 12d^2 - 7d - 10$
Décomposer en facteurs des polynômes de la forme $x^2 + bx + c$ et $ax^2 + bx + c$. [3.4, 3.5, 3.6]	Décomposer des polynômes en facteurs à l'aide de carreaux algébriques, de schémas et de symboles. Rechercher les facteurs communs. Multiplier pour vérifier la réponse.	$5x^2 - 9x - 2$ $= 5x^2 - 10x + x - 2$ $= 5x(x - 2) + 1(x - 2)$ $= (x - 2)(5x + 1)$
Multiplier des polynômes. [3.7]	Appliquer la distributivité : multiplier chaque terme du premier polynôme par chaque terme du second.	$(x - 4)(3x^3 + 5x - 2)$ $= 3x^4 + 5x^2 - 2x - 12x^3 - 20x + 8$ $= 3x^4 - 12x^3 + 5x^2 - 22x + 8$
Décomposer en facteurs des polynômes de type particulier. [3.8]	Décomposer en facteurs un trinôme carré parfait et une différence de carrés. Rechercher les facteurs communs. Multiplier pour vérifier la réponse.	$25x^2 - 49y^2$ $= (5x + 7y)(5x - 7y)$ $4x^2 + 16xy + 16y^2$ $= 4(x + 2y)(x + 2y)$

RÉVISION

3.1

1. Détermine les facteurs premiers de chaque nombre, puis écris le nombre sous la forme du produit de ses facteurs.

a) 594 **b)** 2 100
c) 4 875 **d)** 9 009

2. Détermine le plus grand facteur commun des nombres de chaque ensemble.

a) 120, 160, 180 **b)** 245, 280, 385
c) 176, 320, 368 **d)** 484, 496, 884

3. Détermine le plus petit commun multiple des nombres de chaque ensemble.

a) 70, 90, 140 **b)** 120, 130, 309
c) 200, 250, 500 **d)** 180, 240, 340

4. Un collier a 3 rangs de perles. Chaque rang commence et se termine par une perle rouge. S'il y a une perle rouge toutes les 6 perles sur le premier rang, toutes les 4 perles sur le deuxième rang et toutes les 10 perles sur le troisième rang, quel est le plus petit nombre de perles possible de chaque rang du collier ?

5. Simplifie chaque expression. Comment utilises-tu le plus grand facteur commun et le plus petit commun multiple ?

a) $\frac{1\,015}{1\,305}$ **b)** $\frac{2\,475}{3\,825}$

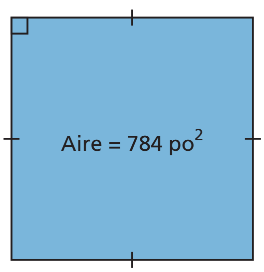
c) $\frac{6\,656}{7\,680}$ **d)** $\frac{7}{36} + \frac{15}{64}$

e) $\frac{5}{9} \div \frac{3}{4}$ **f)** $\frac{28}{128} - \frac{12}{160}$

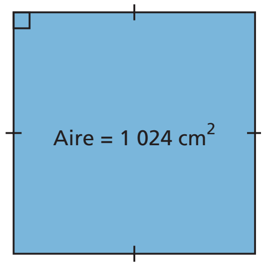
3.2

6. Comment sais-tu que l'aire de chaque carré est un carré parfait ? Détermine la longueur de côté de chaque carré.

a)

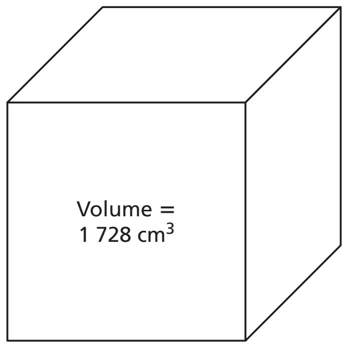


b)

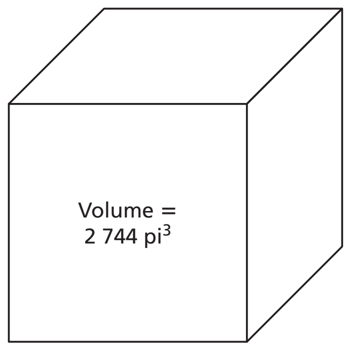


7. Comment sais-tu que le volume de chaque cube est un cube parfait ? Détermine la longueur d'arête de chaque cube.

a)



b)



8. Détermine si chaque nombre est un carré parfait, un cube parfait, ou ni l'un ni l'autre. Trouve la racine carrée de chaque carré parfait et la racine cubique de chaque cube parfait.

a) 256 **b)** 324
c) 729 **d)** 1 298
e) 1 936 **f)** 9 261

9. L'aire d'un carré est de 18 225 pieds carrés. Quel est le périmètre du carré ?

10. L'aire totale d'un cube est de 11 616 cm^2. Quelle est la longueur d'arête du cube ?

3.3

11. Décompose chaque binôme en facteurs. Pour quels binômes peux-tu le faire à l'aide de carreaux algébriques ? Explique pourquoi tu ne peux pas utiliser les carreaux algébriques pour les autres binômes.

a) $8m - 4m^2$ **b)** $-3 + 9g^2$
c) $28a^2 - 7a^3$ **d)** $6a^2b^3c - 15a^2b^2c^2$
e) $-24m^2n - 6mn^2$ **f)** $14b^3c^2 - 21a^3b^2$

12. Décompose chaque trinôme en facteurs. Vérifie les facteurs.

a) $12 + 6g - 3g^2$
b) $3c^2d - 10cd - 2d$
c) $8mn^2 - 12mn - 16m^2n$
d) $y^4 - 12y^2 + 24y$
e) $30x^2y - 20x^2y^2 + 10x^3y^2$
f) $-8b^3 + 20b^2 - 4b$

13. Décompose chaque polynôme en facteurs. Vérifie les facteurs.

a) $8x^2 - 12x$
b) $3y^3 - 12y^2 + 15y$
c) $4b^3 - 2b - 6b^2$
d) $6m^3 - 12m - 24m^2$

14. Trouve et corrige toute erreur dans chaque factorisation.

a) $15p^2q + 25pq^2 - 35q^3$
$= 5(3p^2q + 5pq^2 - 7q^3)$
b) $-12mn + 15m^2 + 18n^2$
$= -3(-4mn + 15m^2 + 18n^2)$

3.4

15. Utilise des carreaux algébriques. Dessine les carreaux utilisés pour chaque trinôme que tu peux représenter par un rectangle.

a) $x^2 + 8x + 12$ **b)** $x^2 + 7x + 10$
c) $x^2 + 4x + 1$ **d)** $x^2 + 8x + 15$

16. Utilise des carreaux algébriques. Dessine les carreaux utilisés pour chaque trinôme que tu peux représenter par un rectangle.

a) $2k^2 + 3k + 2$ **b)** $3g^2 + 4g + 1$
c) $2t^2 + 7t + 6$ **d)** $7h^2 + 5h + 1$

17. Suppose que tu as un carreau x^2 et 5 carreaux unitaires. Quel est le plus petit nombre de carreaux x requis pour former un rectangle ?

3.5

18. Développe et simplifie chaque produit. Représente chaque produit à l'aide d'un schéma rectangulaire.

a) $(g + 5)(g - 4)$ **b)** $(h + 7)(h + 7)$
c) $(k - 4)(k + 11)$ **d)** $(9 + s)(9 - s)$
e) $(12 - t)(12 - t)$ **f)** $(7 + r)(6 - r)$
g) $(y - 3)(y - 11)$ **h)** $(x - 5)(x + 5)$

19. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier la réponse.

a) $q^2 + 6q + 8$ **b)** $n^2 - 4n - 45$
c) $54 - 15s + s^2$ **d)** $k^2 - 9k - 90$
e) $x^2 - x - 20$ **f)** $12 - 7y + y^2$

20. a) Décompose chaque trinôme en facteurs.

i) $m^2 + 7m + 12$
ii) $m^2 + 8m + 12$
iii) $m^2 + 13m + 12$
iv) $m^2 - 7m + 12$
v) $m^2 - 8m + 12$
vi) $m^2 - 13m + 12$

b) Examine les trinômes et leurs facteurs en a). Y a-t-il d'autres trinômes qui commencent par m^2, se terminent par $+12$ et sont décomposables en facteurs ? Si tu réponds oui, énumère ces trinômes et leurs facteurs. Si tu réponds non, explique pourquoi il n'y a pas d'autres facteurs.

21. Trouve et corrige toute erreur dans chaque décomposition en facteurs.

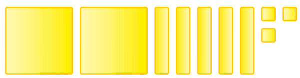
a) $u^2 - 12u + 27 = (u + 3)(u + 9)$
b) $v^2 - v - 20 = (v - 4)(v + 5)$
c) $w^2 + 10w - 24 = (w + 4)(w + 6)$

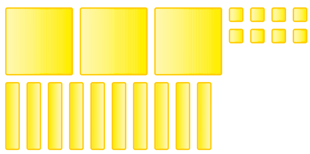
3.6

22. Détermine chaque produit à l'aide de carreaux algébriques. Dessine les carreaux pour montrer ce que tu as fait.

a) $(h + 4)(2h + 2)$ **b)** $(j + 5)(3j + 1)$
c) $(3k + 2)(2k + 1)$ **d)** $(4m + 1)(2m + 3)$

23. Pour chaque ensemble de carreaux algébriques :
   I) écris le trinôme représenté ;
   II) forme un rectangle avec les carreaux et esquisse-le ;
   III) décompose le trinôme en facteurs à l'aide du rectangle.

a) 

b) 

24. Développe et simplifie chaque produit. Représente chaque produit à l'aide d'un schéma rectangulaire.
a) $(2r + 7)(3r + 5)$ b) $(9y + 1)(y - 9)$
c) $(2a - 7)(2a - 6)$ d) $(3w - 2)(3w - 1)$
e) $(4p + 5)(4p + 5)$ f) $(-y + 1)(-3y - 1)$

25. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier la réponse.
a) $4k^2 - 7k + 3$ b) $6c^2 - 13c - 5$
c) $4b^2 - 5b - 6$ d) $6a^2 - 31a + 5$
e) $28x^2 + 9x - 4$ f) $21x^2 + 8x - 4$

26. Trouve et corrige toute erreur dans chaque décomposition en facteurs.
a) $6m^2 + 5m - 21 = (6m - 20)(m + 1)$
b) $12n^2 - 17n - 5 = (4n - 1)(3n + 5)$
c) $20p^2 - 9p - 20 = (4p + 4)(5p - 5)$

3.7

27. Développe et simplifie chaque expression. Substitue un nombre à la variable afin de vérifier le produit.
a) $(c + 1)(c^2 + 3c + 2)$
b) $(5 - 4r)(6 + 3r - 2r^2)$
c) $(-j^2 + 3j + 1)(2j + 11)$
d) $(3x^2 + 7x + 2)(2x - 3)$

28. Développe et simplifie chaque expression.
a) $(4m - p)^2$
b) $(3g - 4h)^2$
c) $(y - 2z)(y + z - 2)$
d) $(3c - 4d)(7 - 6c + 5d)$

29. Développe et simplifie chaque expression. Substitue un nombre à la variable afin de vérifier le produit.
a) $(m^2 + 3m + 2)(2m^2 + m + 5)$
b) $(1 - 3x + 2x^2)(5 + 4x - x^2)$
c) $(-2k^2 + 7k + 6)(3k^2 - 2k - 3)$
d) $(-3 - 5h + 2h^2)(-1 + h + h^2)$

30. Développe et simplifie chaque expression.
a) $(5a + 1)(4a + 2) + (a - 5)(2a - 1)$
b) $(6c - 2)(4c + 2) - (c + 7)^2$

31. Soit n, un nombre entier pair.
a) Écris une expression pour représenter chacun des deux prochains nombres entiers pairs consécutifs.
b) Écris une expression pour représenter le produit des 3 nombres entiers, puis simplifie-la.

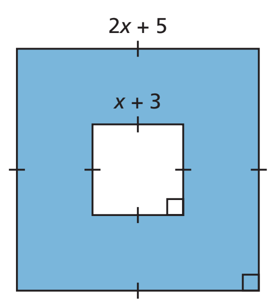
3.8

32. Décompose chaque binôme en facteurs.
a) $81 - 4b^2$ b) $16v^2 - 49$
c) $64g^2 - 16h^2$ d) $18m^2 - 2n^2$

33. Décompose chaque trinôme en facteurs. Multiplie les facteurs pour vérifier la réponse.
a) $m^2 - 14m + 49$ b) $n^2 + 10n + 25$
c) $4p^2 + 12p + 9$ d) $16 - 40q + 25q^2$
e) $4r^2 + 28r + 49$ f) $36 - 132s + 121s^2$

34. Décompose chaque trinôme en facteurs. Quelle stratégie as-tu utilisée dans chaque cas ?
a) $g^2 + 6gh + 9h^2$
b) $16j^2 - 24jk + 9k^2$
c) $25t^2 + 20tu + 4u^2$
d) $9v^2 - 48vw + 64w^2$

35. Détermine l'aire de la région ombrée. Simplifie ta réponse.



TEST PRÉPARATOIRE

Pour les questions 1 et 2, choisis la meilleure réponse : A, B, C ou D.

1. Lequel de ces énoncés ne s'applique pas au nombre 64 ?

A. Il a seulement un facteur.
B. C'est un carré parfait.
C. C'est un cube parfait.
D. Son facteur premier est 2.

2. La décomposition en facteurs du trinôme $2x^2 + 7x + 6$ est :

A. $(2x + 1)(x + 6)$ **B.** $(2x + 2)(x + 3)$
C. $(2x + 3)(x + 2)$ **D.** $(2x + 6)(x + 1)$

3. Écris chaque nombre sous la forme du produit de ses facteurs premiers. Détermine ensuite le plus petit commun multiple et le plus grand facteur commun des 3 nombres.

20 45 50

4. Examine les nombres de la question 3.

a) Par quel nombre devrais-tu multiplier chaque nombre pour obtenir un nombre qui est :

I) un carré parfait ? II) un cube parfait ?

b) Pourquoi y a-t-il plus d'une réponse pour chaque partie en a) ?

5. Développe chaque expression et simplifie-la à l'aide de la stratégie indiquée. Esquisse un schéma qui représente chaque stratégie.

a) Utilise des carreaux algébriques : $(2c + 5)(3c + 2)$
b) Utilise un modèle d'aire : $(9 + 4r)(8 + 6r)$
c) Utilise un schéma rectangulaire : $(4t - 5)(3t + 7)$

6. Développe et simplifie chaque expression.

a) $(2p - 1)(p^2 + 2p - 7)$
b) $(e + 2f)(2f^2 + 5f + 3e^2)$
c) $(3y + 2z)(y + 4z) - (5y - 3z)(2y - 8z)$

7. Décompose chaque polynôme en facteurs. Pour quels trinômes peux-tu utiliser des carreaux algébriques ? Justifie ta réponse.

a) $f^2 + 17f + 16$ **b)** $c^2 - 13c + 22$
c) $4t^2 + 9t - 28$ **d)** $4r^2 + 20rs + 25s^2$
e) $6x^2 - 17xy + 5y^2$ **f)** $h^2 - 25j^2$

8. L'arête d'un cube mesure $2r + 1$. On retire de ce cube un prisme droit à base carrée, dont les dimensions sont r sur r sur $2r + 1$.
Écris une expression pour représenter le volume restant du cube, puis simplifie-la.

9. Écris tous les trinômes qui commencent par $8t^2$, se terminent par $+3$ et sont décomposables en facteurs. Comment sais-tu que tu as trouvé tous les trinômes ?