4 Les racines et les puissances

HABILETÉS ACQUISES

- déterminer la racine carrée d'un nombre rationnel positif
- appliquer les lois des exposants à des puissances ayant une base entière et un exposant naturel

CONCEPTS CLÉS

- Tout nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{m}{n}$ (où $n \neq 0$ et où m et n sont des nombres entiers) est un nombre rationnel.
- Les exposants peuvent servir à représenter des racines et l'inverse de nombres rationnels.
- Les lois des exposants s'appliquent aux puissances ayant des bases rationnelles et variables ainsi que des exposants rationnels.

TERMINOLOGIE

un nombre irrationnel
un nombre réel
un radical sous forme composée
un radical sous forme entière

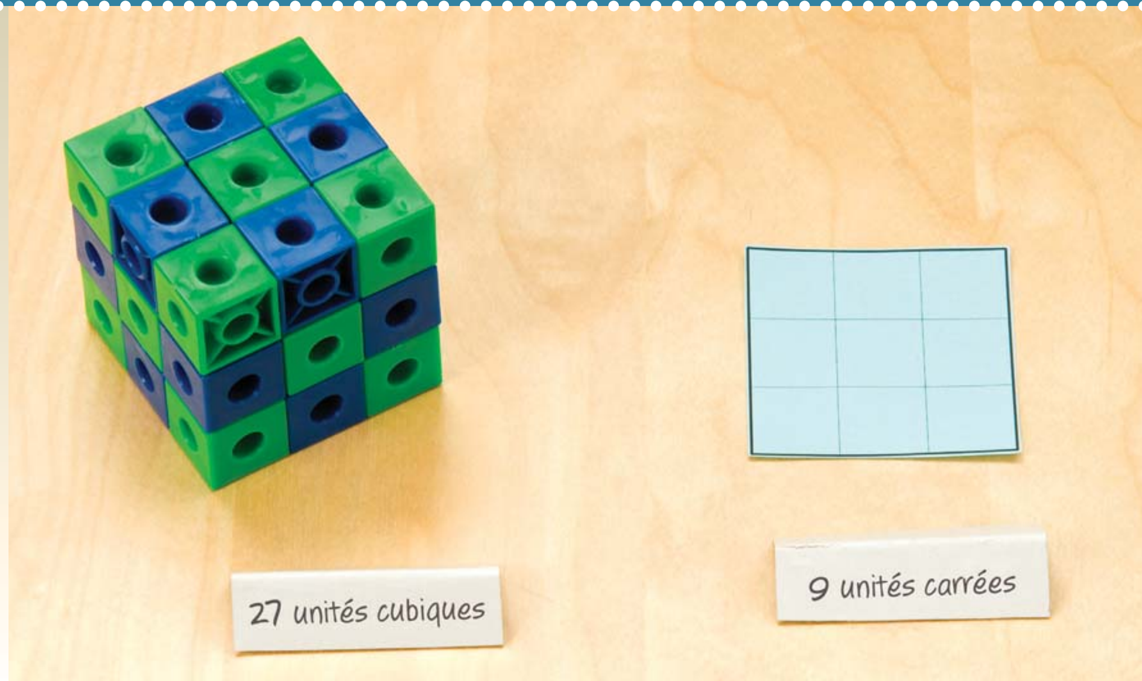
LA YUKON QUEST *C'est une course de chiens de traîneau entre Whitehorse, au Yukon, et Fairbanks, en Alaska.*

LABORATOIRE

4.1 Estimer des racines

OBJECTIF DE LA LEÇON

Explorer la représentation décimale de diverses racines de nombres.



Établis des liens

Puisque $3^2 = 9$, 3 est une racine carrée de 9.

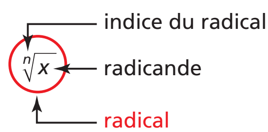
On écrit : $3 = \sqrt{9}$

Puisque $3^3 = 27$, 3 est la racine cubique de 27.

On écrit : $3 = \sqrt[3]{27}$

Puisque $3^4 = 81$, 3 est une racine quatrième de 81.

On écrit : $3 = \sqrt[4]{81}$



Comment écrirais-tu 5 sous la forme d'une racine carrée ? d'une racine cubique ? d'une racine quatrième ?

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.

Tu as besoin d'une calculatrice pour vérifier tes estimations.

A. Écris les deux carrés parfaits consécutifs les plus proches de 20. Estime la valeur de $\sqrt{20}$. Élève ton estimation au carré. Vérifie ton estimation à l'aide de cette valeur. Précise ton estimation jusqu'à ce que le carré de l'estimation se situe à une décimale près de 20.

B. Écris les deux cubes parfaits consécutifs les plus proches de 20. Estime la valeur de $\sqrt[3]{20}$. Élève ton estimation au cube. Vérifie ton estimation à l'aide de cette valeur. Précise ton estimation jusqu'à ce que le cube de l'estimation se situe à un dixième près de 20.

C. Écris les deux puissances quatrièmes consécutives les plus proches de 20. Utilise la même stratégie qu'aux étapes A et B pour estimer une valeur de $\sqrt[4]{20}$.

D. Copie ce tableau et remplis-le. Utilise les stratégies des étapes A à C pour déterminer la valeur de chaque radical.

Radical	Valeur	La valeur est-elle exacte ou approximative ?
$\sqrt{16}$	4	Exacte
$\sqrt{27}$	5,196 2	Approximative
$\sqrt{\frac{16}{81}}$	$\frac{4}{9}$ ou $0,\overline{4}$	Exacte
$\sqrt{0,64}$		
$\sqrt[3]{16}$		
$\sqrt[3]{27}$		
$\sqrt[3]{\frac{16}{81}}$		
$\sqrt[3]{0,64}$		
$\sqrt[3]{-0,64}$		
$\sqrt[4]{16}$		
$\sqrt[4]{27}$		
$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$		
$\sqrt[4]{0,64}$		

Choisis 3 autres radicaux.
Prolonge le tableau et remplis-le pour ces radicaux.

E. Comment sais-tu si la valeur d'un radical est un nombre rationnel ? Quelles stratégies te permettent de déterminer la valeur du radical ?

F. Comment sais-tu si la valeur d'un radical *n*'est *pas* un nombre rationnel ? Quelles stratégies te permettent d'estimer la valeur du radical ?

Évalue ta compréhension

1. **a)** Donne 4 exemples de radicaux. Utilise un indice de radical différent dans chaque cas.
b) Indique le radicande et l'indice de chaque radical.
c) Explique la signification de l'indice de chaque radical.

2. Évalue chaque radical. Explique tes réponses.

a) $\sqrt{36}$ **b)** $\sqrt[3]{8}$ **c)** $\sqrt[4]{10\,000}$ **d)** $\sqrt[5]{-32}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{125}}$ **f)** $\sqrt{2{,}25}$ **g)** $\sqrt[3]{0{,}125}$ **h)** $\sqrt[4]{625}$

3. Estime la valeur de chaque radical au dixième près.
Quelle stratégie as-tu utilisée ?

a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt[3]{9}$ **c)** $\sqrt[4]{10}$ **d)** $\sqrt{13}$
e) $\sqrt[3]{15}$ **f)** $\sqrt[4]{17}$ **g)** $\sqrt{19}$ **h)** $\sqrt[3]{20}$

4. **a)** Qu'arrive-t-il si tu essaies de déterminer la racine carrée d'un nombre tel que -4 ? Explique le résultat.
b) Pour quels autres indices de radical obtiens-tu le même résultat qu'en a) si le radicande est négatif ?
c) Quand le radicande est négatif :
i) quels types de radicaux peux-tu évaluer ou estimer ?
ii) quels types de radicaux est-il impossible d'évaluer ou d'estimer ?

5. Écris chaque nombre sous les formes indiquées.
i) une racine carrée ii) une racine cubique iii) une racine quatrième
a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 10 **e)** 0,9 **f)** 0,2

6. Choisis des valeurs de n et de x telles que $\sqrt[n]{x}$ est :
a) un nombre naturel. **b)** un nombre entier négatif.
c) un nombre rationnel. **d)** un nombre décimal approximatif.
Vérifie tes réponses.

4.2 Les nombres irrationnels

OBJECTIF DE LA LEÇON

Identifier et ordonner des nombres irrationnels.

Voici la rotonde du Palais législatif du Manitoba. Son plancher est circulaire.

Établis des liens

Les formules de l'aire et de la circonférence d'un cercle contiennent π. Or, π n'est pas un nombre rationnel, car il est impossible de l'écrire sous la forme d'un quotient de nombres entiers.

Quels autres nombres ne sont pas des nombres rationnels ?

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.

Ces nombres sont rationnels.	Ces nombres ne sont pas rationnels.
$\sqrt{100}$ $\sqrt{0{,}25}$ $\sqrt[3]{8}$ $0{,}5$	$\sqrt{0{,}24}$ $\sqrt[3]{9}$ $\sqrt{2}$
$\frac{5}{6}$ $\sqrt{\frac{9}{64}}$ $0{,}8^2$ $\sqrt[5]{-32}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[4]{12}$

A. Quelles sont les différences entre les radicaux qui sont des nombres rationnels et les radicaux qui ne sont pas des nombres rationnels ?

B. Parmi les radicaux suivants, lesquels sont des nombres rationnels ? Lesquels ne sont pas des nombres rationnels ? Comment le sais-tu ?

$\sqrt{1{,}44}$, $\sqrt{\dfrac{64}{81}}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$, $\sqrt{5}$

C. Écris 3 autres radicaux qui sont des nombres rationnels. Pourquoi sont-ils rationnels ?

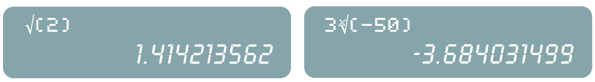
D. Écris 3 autres radicaux qui ne sont pas des nombres rationnels. Pourquoi ne sont-ils pas rationnels ?

Les radicaux qui sont des racines carrées de carrés parfaits, des racines cubiques de cubes parfaits et ainsi de suite sont des nombres rationnels. La représentation décimale d'un nombre rationnel est finie ou périodique.

Les nombres irrationnels

Un **nombre irrationnel** *ne* peut *pas* s'écrire sous la forme $\dfrac{m}{n}$, où m et n sont des nombres entiers et où $n \neq 0$. La représentation décimale d'un nombre irrationnel n'est ni finie ni périodique.

Quand un nombre irrationnel est écrit sous la forme d'un radical, par exemple, $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{-50}$, le radical représente la *valeur exacte* du nombre irrationnel. Les touches de racine carrée et de racine cubique d'une calculatrice permettent de déterminer la *valeur approximative* de ces nombres irrationnels.



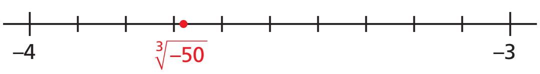
Il existe des nombres irrationnels autres que les radicaux ; π, par exemple.

Tu peux déterminer la position approximative d'un nombre irrationnel sur une droite numérique. Si tu ne disposes pas d'une calculatrice, utilise des puissances parfaites pour estimer la valeur du nombre.
Par exemple, pour situer $\sqrt[3]{-50}$ sur une droite numérique, rappelle-toi que $\sqrt[3]{-27} = -3$ et que $\sqrt[3]{-64} = -4$.

Prédis : $\sqrt[3]{-50} \approx -3{,}6$ Vérifie : $(-3{,}6)^3 = -46{,}656$

Prédis : $\sqrt[3]{-50} \approx -3{,}7$ Vérifie : $(-3{,}7)^3 = -50{,}653$

Cette valeur est suffisamment proche pour représenter le nombre sur une droite numérique.



Puisque $(-3{,}7)^3 = -50{,}653$, alors la valeur de $\sqrt[3]{-50}$ est un peu plus élevée que $-3{,}7$. Trace donc un point à la droite de $-3{,}7$ sur la droite numérique.

Exemple 1 Trier des nombres

Indique si chaque nombre est rationnel ou irrationnel.
Explique comment tu le sais.

a) $-\frac{3}{5}$ **b)** $\sqrt{14}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

SOLUTION

a) Puisque $-\frac{3}{5}$ est écrit sous la forme d'un quotient de nombres entiers, c'est un nombre rationnel. Sa forme décimale est $-0,6$, qui est finie.

b) Puisque 14 n'est pas un carré parfait, $\sqrt{14}$ est un nombre irrationnel. La forme décimale de $\sqrt{14}$ n'est ni finie ni périodique.

c) Puisque $\frac{8}{27}$ est un cube parfait, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ est un nombre rationnel.

$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ ou $0,\overline{6}$, qui est un nombre décimal périodique.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Indique si chaque nombre est rationnel ou irrationnel. Explique comment tu le sais.

a) $\sqrt{\frac{49}{16}}$ **b)** $\sqrt[3]{-30}$

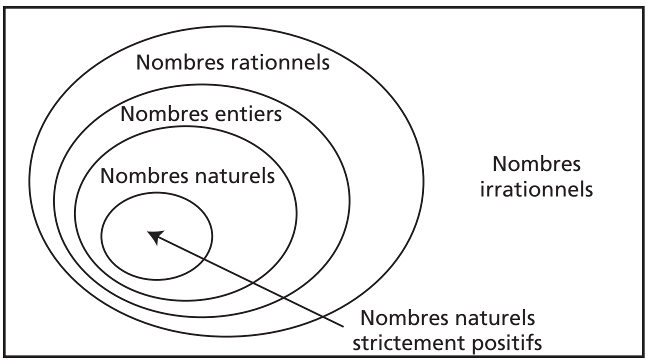
c) 1,21

[Réponses : a) rationnel ; b) irrationnel ; c) rationnel]

Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble des **nombres réels.**

Le diagramme suivant montre la relation entre ces ensembles de nombres.

Les nombres réels



Exemple 2 Ordonner des nombres irrationnels sur une droite numérique

Place ces nombres par ordre croissant à l'aide d'une droite numérique.

$\sqrt[3]{13}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[3]{-5}$

(Suite de la solution à la page suivante)

SOLUTION

Le nombre 13 se situe entre les cubes parfaits 8 et 27, mais il est plus proche de 8.

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[3]{8} & \sqrt[3]{13} & \sqrt[3]{27} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & ? & 3 \end{array}$$

Utilise une calculatrice.

3√(13)
2.351334688

$\sqrt[3]{13} = 2{,}351\,3\ldots$

Le nombre 18 se situe entre les carrés parfaits 16 et 25, mais il est plus proche de 16.

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{16} & \sqrt{18} & \sqrt{25} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & ? & 5 \end{array}$$

Utilise une calculatrice.

√(18)
4.242640687

$\sqrt{18} = 4{,}242\,6\ldots$

$\sqrt{9} = 3$

Le nombre 27 se situe entre les quatrièmes puissances parfaites 16 et 81, mais il est plus proche de 16.

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[4]{16} & \sqrt[4]{27} & \sqrt[4]{81} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & ? & 3 \end{array}$$

Utilise une calculatrice.

4√(27)
2.279507057

$\sqrt[4]{27} = 2{,}279\,5\ldots$

Le nombre -5 se situe entre les cubes parfaits -1 et -8, mais il est plus proche de -8.

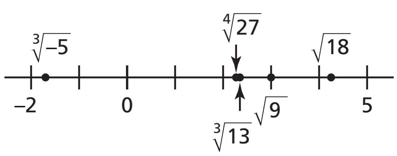
$$\begin{array}{ccc} \sqrt[3]{-1} & \sqrt[3]{-5} & \sqrt[3]{-8} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -1 & ? & -2 \end{array}$$

Utilise une calculatrice.

3√(-5)
-1.709975947

$\sqrt[3]{-5} = -1{,}709\,9\ldots$

Représente chaque nombre sur une droite numérique.



Par ordre croissant : $\sqrt[3]{-5}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[3]{13}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{18}$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Place ces nombres par ordre croissant à l'aide d'une droite numérique.

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt[4]{30}$

[Réponse : $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{30}$, $\sqrt{11}$]

Comment peux-tu ordonner un ensemble de nombres irrationnels sans l'aide d'une calculatrice ?

Place à la discussion

1. Comment détermines-tu si un radical représente un nombre rationnel ou un nombre irrationnel ? Inclus des exemples.
2. Comment détermines-tu si la forme décimale d'un radical représente sa valeur exacte ?

Exercices

A

3. Détermine si chaque nombre est rationnel ou irrationnel.

a) $\sqrt{12}$ **b)** $\sqrt[4]{16}$ **c)** $\sqrt[3]{-100}$

d) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ **e)** $\sqrt{1{,}25}$ **f)** 1,25

4. Indique si chaque nombre est :

a) un nombre naturel strictement positif,
b) un nombre entier,
c) un nombre rationnel,
d) un nombre irrationnel.

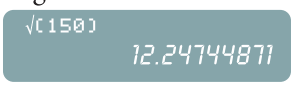
$\dfrac{4}{3}$; $0{,}3\overline{4}$; -5 ; $\sqrt[4]{9}$; $-2{,}153\,8$; $\sqrt[3]{27}$; 7

B

5. a) Pourquoi $\sqrt{49}$ et $\sqrt[4]{16}$ sont-ils des nombres rationnels ?

b) Pourquoi $\sqrt{21}$ et $\sqrt[3]{36}$ sont-ils des nombres irrationnels ?

6. Regarde cet écran de calculatrice.



a) Le nombre 12,247 448 71 est-il rationnel ou irrationnel ? Justifie ta réponse.

b) Le nombre $\sqrt{150}$ est-il rationnel ou irrationnel ? Justifie ta réponse.

7. a) Trace un diagramme qui représente l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres irrationnels.

b) Inscris chaque nombre dans l'ensemble approprié.

$\dfrac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt[4]{5}$, $-\dfrac{7}{6}$, $\sqrt[3]{8}$, 10,12, $-13{,}\overline{4}$, $\sqrt{0{,}15}$, $\sqrt{0{,}16}$, 17

8. Pour quels nombres la racine cubique sera-t-elle irrationnelle ? Justifie tes réponses à l'aide de deux stratégies.

a) 8 **b)** 64 **c)** 30 **d)** 300

9. Trace une droite numérique pour chaque nombre irrationnel et indique sa position approximative. Explique ton raisonnement.

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt[3]{12}$ **c)** $\sqrt[4]{25}$ **d)** $\sqrt[3]{-12}$

10. Place les nombres irrationnels de chaque ensemble par ordre décroissant à l'aide d'une droite numérique.

a) $\sqrt[3]{70}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt[4]{100}$, $\sqrt[3]{400}$

b) $\sqrt{89}$, $\sqrt[4]{250}$, $\sqrt[3]{-150}$, $\sqrt[3]{150}$

11. Place ces nombres par ordre croissant à l'aide d'une droite numérique. Comment peux-tu vérifier ta réponse ?

$\sqrt{40}$, $\sqrt[3]{500}$, $\sqrt{98}$, $\sqrt[3]{98}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt[3]{300}$

12. Place ces nombres par ordre croissant à l'aide d'une droite numérique. Indique les nombres qui sont irrationnels et ceux qui sont rationnels.

$\dfrac{-14}{5}$, $\dfrac{123}{99}$, -2, $\sqrt[3]{-10}$, $\sqrt{4}$

13. Comment utilises-tu les nombres irrationnels quand tu calcules la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 5 cm et 3 cm ?

14. a) Quels énoncés sont vrais ? Explique ton raisonnement.

I) Tous les nombres naturels strictement positifs sont des nombres entiers.
II) Tous les nombres entiers sont des nombres rationnels.
III) Tous les nombres naturels sont des nombres naturels strictement positifs.
IV) Tous les nombres irrationnels sont des racines.
V) Certains nombres rationnels sont des nombres naturels strictement positifs.

b) Pour chaque énoncé faux en a), donne des exemples qui expliquent ta réponse.

15. Écris un nombre qui est :

a) rationnel, mais n'est pas entier.

b) naturel, mais qui n'est pas un nombre naturel strictement positif.

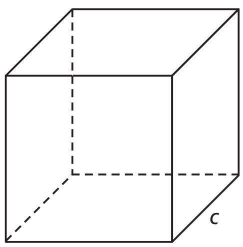
c) irrationnel.

16. **a)** Fais un diagramme qui montre les relations entre ces ensembles : les nombres irrationnels, les nombres rationnels, les nombres entiers, les nombres naturels et les nombres naturels strictement positifs. Inscris chaque nombre dans le diagramme.

$\frac{3}{5}$; 4,919 19 ; 16 ; $\sqrt[3]{-64}$; $\sqrt{60}$; $\sqrt{9}$; -7 ; 0

b) Ajoute 3 autres nombres à chaque ensemble. Inscris-les dans ton diagramme.

17. Ce schéma montre un cube dont le volume est de *V* unités cubiques et dont la longueur d'arête est de *c* unités.



Indique une valeur de *V* si *c* est un nombre :

a) irrationnel. **b)** rationnel.

18. Le *rectangle d'or* est fréquent en art et en architecture. Le rapport de sa longueur à sa largeur est de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ à 1. La façade du Parthénon, en Grèce, est un rectangle d'or.

a) Utilise une calculatrice. Écris la valeur de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ au dixième près.

b) Construis un rectangle d'or, sachant que le nombre trouvé en a) est la longueur en pouces du rectangle.

c) Mesure d'autres rectangles dans ta classe. Y a-t-il des rectangles qui approchent un rectangle d'or ? Justifie ta réponse.

19. Le rapport $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ définit le *nombre d'or.* Utilise les dimensions de la Grande Pyramide de Gizeh, à la page 26 du chapitre 1. Montre que le rapport entre la longueur de côté de la base et la hauteur est proche du nombre d'or.

20. Détermine si le périmètre de chaque carré est un nombre rationnel ou un nombre irrationnel. Justifie ta réponse.

a) un carré dont l'aire est de 40 cm^2

b) un carré dont l'aire est de 81 m^2

C

21. Suppose que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ est un nombre rationnel et que *a* et *b* n'ont pas de facteur commun. Que peux-tu dire à propos de la décomposition de *a* et de *b* en facteurs premiers ?

22. Pour chaque description, esquisse un triangle rectangle et indique ses mesures, ou explique pourquoi il est impossible d'en créer un.

a) Toutes les longueurs de côté sont des nombres rationnels.

b) Exactement deux côtés ont des longueurs rationnelles.

c) Un côté seulement a une longueur rationnelle.

d) Aucune longueur de côté n'est un nombre rationnel.

23. **a)** La racine carrée d'un nombre rationnel peut-elle être un nombre irrationnel ? Montre ton raisonnement.

b) La racine carrée d'un nombre irrationnel peut-elle être un nombre rationnel ? Montre ton raisonnement.

24. Décris des stratégies pour générer des nombres dont les racines carrées, cubiques et quatrièmes sont toutes des nombres rationnels. Inclus des exemples.

Réfléchis

Décris des stratégies que tu peux utiliser pour déterminer si un radical représente un nombre rationnel ou un nombre irrationnel.

4.3 Les radicaux sous forme composée et sous forme entière

OBJECTIF DE LA LEÇON

Écrire, sous forme composée, un radical sous forme entière, et vice versa.

Cette courtepointe représente une spirale de Pythagore. Le plus petit triangle est un triangle rectangle isocèle dont les cathètes mesurent 1 unité de longueur.

Établis des liens

Tu peux exprimer la fraction $\frac{3}{12}$ de plusieurs façons :

$\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{5}{20}$ $\quad$ $\frac{30}{120}$ $\quad$ $\frac{100}{400}$

Comment peux-tu montrer que chaque fraction est équivalente à $\frac{3}{12}$?
Pourquoi $\frac{1}{4}$ est-elle la forme simplifiée de $\frac{3}{12}$?

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.

Tu as besoin de papier quadrillé à 1 cm et d'une calculatrice.

A. Sur du papier quadrillé, construis un triangle rectangle isocèle dont les cathètes mesurent 1 cm. Écris la longueur de l'hypoténuse sous la forme d'un radical. Indique les longueurs des côtés sur ton dessin.

B. Construis un triangle rectangle isocèle dont les cathètes mesurent 2 cm. Écris la longueur de l'hypoténuse sous la forme d'un radical. Indique les longueurs des côtés sur ton dessin.

C. Explique pourquoi le triangle de l'étape B est un agrandissement du triangle de l'étape A. Quel est le facteur d'agrandissement ? Quelle relation y a-t-il entre la longueur de l'hypoténuse du grand triangle et la longueur correspondante du petit triangle ?

D. Trace trois triangles rectangles isocèles dont les cathètes mesurent respectivement 3 cm, 4 cm et 5 cm. Pour chaque triangle, écris la longueur de l'hypoténuse de deux façons.

E. Décris toute relation entre les longueurs des côtés des triangles. Quelle forme du radical permet de mieux voir les relations ?

Comme dans le cas des fractions, des expressions équivalentes d'un nombre quelconque ont la même valeur.

- L'expression $\sqrt{16 \cdot 9}$ est équivalente à $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$ parce que :

$$\begin{aligned} \sqrt{16 \cdot 9} &= \sqrt{144} \\ &= 12 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} &= 4 \cdot 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

- De même, l'expression $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ est équivalente à $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$ parce que :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8 \cdot 27} &= \sqrt[3]{216} \\ &= 6 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

La multiplication de radicaux

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,
où n est un nombre naturel strictement positif, et a et b sont des nombres réels.

Tu peux utiliser cette propriété pour simplifier des racines carrées et des racines cubiques qui ne sont pas des carrés parfaits ou des cubes parfaits, mais qui ont des facteurs qui sont des carrés parfaits ou des cubes parfaits.
Par exemple, les facteurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

- Tu peux simplifier $\sqrt{24}$, car 24 a un facteur qui est un carré parfait, 4. Réécris 24 sous la forme du produit de deux facteurs, dont l'un est 4.

$$\begin{aligned} \sqrt{24} &= \sqrt{4 \cdot 6} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} \\ &= 2 \cdot \sqrt{6} \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

Pour $2\sqrt{6}$, tu dis « 2 racine carrée de 6 ».

- De même, tu peux simplifier $\sqrt[3]{24}$, car 24 a un facteur qui est un cube parfait, 8. Réécris 24 sous la forme du produit de deux facteurs, dont l'un est 8.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{8 \cdot 3}\\ &= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3}\\ &= 2 \cdot \sqrt[3]{3}\\ &= 2\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

L'expression $2\sqrt[3]{3}$ se lit « 2 racine cubique de 3 ».

- Cependant, tu ne peux pas simplifier $\sqrt[4]{24}$, parce que 24 n'a aucun facteur, autre que 1, qui est une puissance quatrième.

Tu peux également simplifier un radical à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

Exemple 1 Simplifier des radicaux à l'aide de la décomposition en facteurs premiers

Simplifie chaque radical.

a) $\sqrt{80}$ b) $\sqrt[3]{144}$ c) $\sqrt[4]{162}$

SOLUTION

Écris chaque radical sous la forme d'un produit de facteurs premiers, puis simplifie-le.

a)
$$\begin{aligned}\sqrt{80} &= \sqrt{8 \cdot 10}\\ &= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2}\\ &= \sqrt{(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5}\\ &= \sqrt{2 \cdot 2} \cdot \sqrt{2 \cdot 2} \cdot \sqrt{5}\\ &= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5}\\ &= 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

Étant donné que $\sqrt{80}$ est une racine carrée, cherche des facteurs qui apparaissent 2 fois.

b)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{144} &= \sqrt[3]{12 \cdot 12}\\ &= \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}\\ &= \sqrt[3]{(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}\\ &= \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 3}\\ &= 2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 3}\\ &= 2\sqrt[3]{18}\end{aligned}$$

Étant donné que $\sqrt[3]{144}$ est une racine cubique, cherche des facteurs qui apparaissent 3 fois.

c)
$$\begin{aligned}\sqrt[4]{162} &= \sqrt[4]{81 \cdot 2}\\ &= \sqrt[4]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2}\\ &= \sqrt[4]{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 2}\\ &= \sqrt[4]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{2}\\ &= 3\sqrt[4]{2}\end{aligned}$$

Étant donné que $\sqrt[4]{162}$ est une racine quatrième, cherche des facteurs qui apparaissent 4 fois.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Simplifie chaque radical.

a) $\sqrt{63}$

b) $\sqrt[3]{108}$

c) $\sqrt[4]{128}$

[Réponses : a) $3\sqrt{7}$; b) $3\sqrt[3]{4}$; c) $2\sqrt[4]{8}$]

Certains nombres ont plus d'un facteur qui est un carré parfait.
Par exemple, les facteurs de 200 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100 et 200.
Étant donné que 4, 25 et 100 sont des carrés parfaits, tu peux simplifier $\sqrt{200}$ de trois façons.

$$\sqrt{200} = \sqrt{4 \cdot 50} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{50} = 2\sqrt{50}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{25 \cdot 8} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{8} = 5\sqrt{8}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$10\sqrt{2}$ est la forme simplifiée, car le radical ne comporte aucun facteur, autre que 1, qui est un carré parfait.

Pour écrire un radical d'indice n sous sa forme simplifiée, écris le radicande comme le produit de 2 facteurs dont l'un est la plus grande puissance n^e parfaite.

Exemple 2 Écrire des radicaux sous leur forme simplifiée

Écris chaque radical sous sa forme simplifiée, lorsque c'est possible.

a) $\sqrt[3]{40}$ **b)** $\sqrt{26}$ **c)** $\sqrt[4]{32}$

SOLUTION

Cherche des facteurs qui sont une puissance n^e parfaite, où n est l'indice du radical.

a) Les facteurs de 40 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 et 40.
Étant donné que le plus grand cube parfait est $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, écris 40 sous la forme $8 \cdot 5$.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{40} &= \sqrt[3]{8 \cdot 5}\\ &= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5}\\ &= 2 \cdot \sqrt[3]{5}\\ &= 2\sqrt[3]{5}\end{aligned}$$

b) Les facteurs de 26 sont 1, 2, 13 et 26.
Il n'y a aucun facteur carré parfait autre que 1.
Alors, $\sqrt{26}$ ne se simplifie pas.

c) Les facteurs de 32 sont 1, 2, 4, 8, 16 et 32.
Étant donné que la plus grande puissance quatrième est $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, écris 32 sous la forme $16 \cdot 2$.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{32} &= \sqrt[4]{16 \cdot 2}\\ &= \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2}\\ &= 2 \cdot \sqrt[4]{2}\\ &= 2\sqrt[4]{2}\end{aligned}$$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Écris chaque radical sous sa forme simplifiée, lorsque c'est possible.

a) $\sqrt{30}$

b) $\sqrt[3]{32}$

c) $\sqrt[4]{48}$

[Réponses : a) Impossible ; b) $2\sqrt[3]{4}$; c) $2\sqrt[4]{3}$]

Les radicaux de la forme $\sqrt[n]{x}$, tels que $\sqrt{80}$, $\sqrt[3]{144}$ et $\sqrt[4]{162}$, sont des **radicaux sous forme entière.**

Les radicaux de la forme $a\sqrt[n]{x}$, tels que $4\sqrt{5}$, $2\sqrt[3]{18}$ et $3\sqrt[4]{2}$, sont des **radicaux sous forme composée.** Dans les exemples 1 et 2, tu as vu comment écrire, sous forme composée, des radicaux présentés sous forme entière.

Il est possible d'écrire tout nombre sous la forme de la racine carrée de son carré, par exemple $2 = \sqrt{2 \cdot 2}$, $3 = \sqrt{3 \cdot 3}$, $4 = \sqrt{4 \cdot 4}$ et ainsi de suite. De même, tu peux écrire tout nombre sous la forme de la racine cubique de son cube, ou de la racine quatrième de sa puissance quatrième parfaite. Tu peux utiliser cette stratégie pour écrire, sous forme entière, un radical sous forme composée.

Exemple 3 Écrire, sous forme entière, des radicaux sous forme composée

Écris chaque radical sous forme entière.

a) $4\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt[3]{2}$ **c)** $2\sqrt[5]{2}$

SOLUTION

a) Écris 4 sous la forme : $\sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{16}$

$$\begin{aligned} 4\sqrt{3} &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} \\ &= \sqrt{16 \cdot 3} \\ &= \sqrt{48} \end{aligned}$$

Utilise la règle de multiplication des radicaux.

b) Écris 3 sous la forme : $\sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[3]{27}$

$$\begin{aligned} 3\sqrt[3]{2} &= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= \sqrt[3]{27 \cdot 2} \\ &= \sqrt[3]{54} \end{aligned}$$

c) Écris 2 sous la forme : $\sqrt[5]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[5]{32}$

$$\begin{aligned} 2\sqrt[5]{2} &= \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{2} \\ &= \sqrt[5]{32 \cdot 2} \\ &= \sqrt[5]{64} \end{aligned}$$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Écris chaque radical sous forme entière.

a) $7\sqrt{3}$

b) $2\sqrt[3]{4}$

c) $2\sqrt[5]{3}$

[Réponses : a) $\sqrt{147}$; b) $\sqrt[3]{32}$; c) $\sqrt[5]{96}$]

Comment le fait d'écrire, sous forme entière, des radicaux donnés sous forme composée peut-il t'aider à ordonner des radicaux sous forme composée ayant le même indice ?

Place à la discussion

1. Comment sais-tu si tu peux écrire, sous forme composée, un radical présenté sous forme entière ?

2. Soit un radical sous forme entière qui peut être simplifié. Comment la règle de multiplication des radicaux t'aide-t-elle à écrire sa forme simplifiée ?

Exercices

A

3. Dresse la liste des carrés parfaits jusqu'à 400, et de leurs racines carrées.

4. Écris chaque radical sous sa forme simplifiée.

a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{12}$ **c)** $\sqrt{32}$ **d)** $\sqrt{50}$
e) $\sqrt{18}$ **f)** $\sqrt{27}$ **g)** $\sqrt{48}$ **h)** $\sqrt{75}$

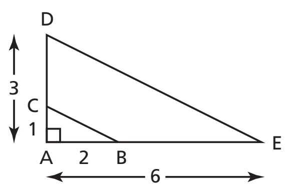
5. Écris chaque radical sous forme entière.

a) $5\sqrt{2}$ **b)** $6\sqrt{2}$ **c)** $7\sqrt{2}$ **d)** $8\sqrt{2}$
e) $5\sqrt{3}$ **f)** $6\sqrt{3}$ **g)** $7\sqrt{3}$ **h)** $8\sqrt{3}$

6. **a)** Dresse la liste de tous les cubes parfaits jusqu'à 1 000, et de leurs racines cubiques.
b) Dresse la liste de toutes les puissances quatrièmes parfaites jusqu'à 1 000, et de leurs racines quatrièmes.

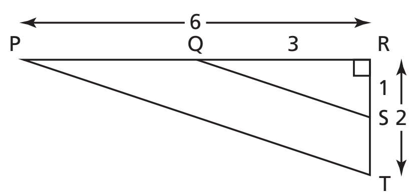
B

7. **a)** Explique pourquoi $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ à l'aide du schéma.



b) Vérifie algébriquement que $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

8. **a)** Explique pourquoi $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ à l'aide du schéma.



b) Vérifie algébriquement que $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

9. Explique pourquoi le fait d'exprimer $\sqrt{50}$ sous la forme $\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}$ t'aide à simplifier $\sqrt{50}$, mais pas le fait d'écrire $\sqrt{50}$ sous la forme $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}$.

10. Écris chaque radical sous forme simplifiée, lorsque c'est possible.

a) $\sqrt{90}$ **b)** $\sqrt{73}$ **c)** $\sqrt{108}$
d) $\sqrt{600}$ **e)** $\sqrt{54}$ **f)** $\sqrt{91}$
g) $\sqrt{28}$ **h)** $\sqrt{33}$ **i)** $\sqrt{112}$

11. Écris chaque radical sous forme simplifiée, lorsque c'est possible.

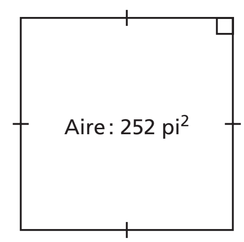
a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $\sqrt[3]{81}$ **c)** $\sqrt[3]{256}$ **d)** $\sqrt[3]{128}$
e) $\sqrt[3]{60}$ **f)** $\sqrt[3]{192}$ **g)** $\sqrt[3]{135}$ **h)** $\sqrt[3]{100}$
i) $\sqrt[3]{500}$ **j)** $\sqrt[3]{375}$

12. Écris chaque radical sous forme entière.

a) $3\sqrt{2}$ **b)** $4\sqrt{2}$ **c)** $6\sqrt{5}$ **d)** $5\sqrt{6}$
e) $7\sqrt{7}$ **f)** $2\sqrt[3]{2}$ **g)** $3\sqrt[3]{3}$ **h)** $4\sqrt[3]{3}$
i) $5\sqrt[3]{2}$ **j)** $2\sqrt[3]{9}$

13. **a)** Peux-tu écrire, sous forme entière, tous les radicaux sous forme composée ?
b) Peux-tu écrire, sous forme composée, tous les radicaux sous forme entière ?
Donne des exemples.

14. Exprime la longueur de côté de ce carré sous la forme d'un radical simplifié.



15. Un cube a un volume de 200 cm³. Écris la longueur d'arête du cube sous la forme d'un radical simplifié.

16. Un carré a une aire de 54 pouces carrés. Détermine le périmètre du carré. Écris la réponse sous la forme d'un radical simplifié.

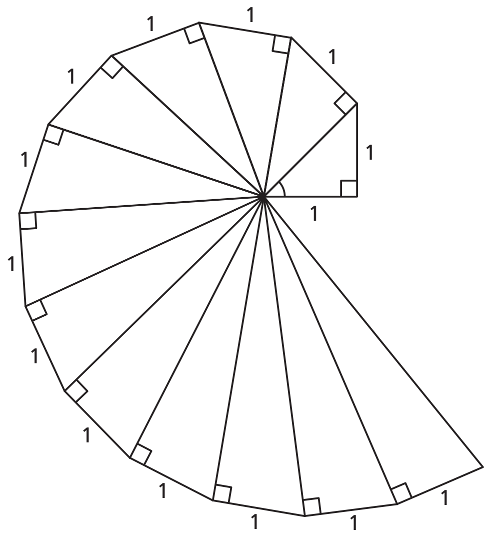
17. Écris chaque radical sous forme simplifiée.

a) $\sqrt[4]{48}$ **b)** $\sqrt[4]{405}$ **c)** $\sqrt[4]{1\,250}$ **d)** $\sqrt[4]{176}$

18. Écris chaque radical sous forme entière.

a) $6\sqrt[4]{3}$ **b)** $7\sqrt[4]{2}$ **c)** $3\sqrt[5]{4}$ **d)** $4\sqrt[5]{3}$

19. La courtepointe à la page 213 se compose de triangles rectangles. À la page 77 du chapitre 2, tu as déterminé les tangentes des angles au centre de la spirale. Le premier triangle est un triangle rectangle isocèle dont les cathètes mesurent 1 unité de longueur. L'hypoténuse de ce triangle correspond à la cathète du deuxième triangle, dont l'autre cathète mesure 1 unité de longueur. Cette régularité se prolonge.



a) Calcule la longueur de l'hypoténuse de chaque triangle. Représente chaque longueur par un radical sous forme entière.

b) I) Quelle régularité vois-tu dans les longueurs?

II) Prédis la longueur de l'hypoténuse du 50e triangle à l'aide de cette régularité.

III) Parmi les 100 premiers triangles, combien ont des longueurs d'hypoténuse que tu peux représenter par un radical sous forme composée? Justifie ta réponse.

20. Voici la solution proposée par une élève pour écrire le radical $8\sqrt[3]{2}$ sous sa forme entière.

$$\begin{aligned} 8\sqrt[3]{2} &= 8 \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= \sqrt[3]{2 \cdot 2} \\ &= \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Trouve une erreur commise par l'élève, puis écris la solution juste.

21. Un élève a simplifié $\sqrt{96}$ ainsi :

$$\begin{aligned} \sqrt{96} &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{48} \\ &= 2 \cdot \sqrt{48} \\ &= 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{6} \\ &= 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{6} \\ &= 8\sqrt{6} \end{aligned}$$

Trouve les erreurs commises par l'élève, puis écris une solution juste.

22. Place les nombre de chaque liste par ordre décroissant. Quelle stratégie as-tu utilisée dans chaque cas ?

a) $9\sqrt{2}$, $2\sqrt{6}$, $8\sqrt{3}$, $4\sqrt{5}$, $6\sqrt{2}$

b) $4\sqrt{7}$, $8\sqrt{3}$, $2\sqrt{13}$, $6\sqrt{5}$

c) $7\sqrt{3}$, $9\sqrt{2}$, $5\sqrt{6}$, $\sqrt{103}$, $3\sqrt{17}$

23. Simplifie les radicaux de chaque liste.
Quelles régularités vois-tu ?
Écris les 2 prochains radicaux de chaque liste.

a) $\sqrt{4}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{40\,000}$

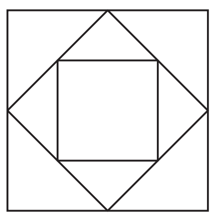
b) $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{27\,000}$, $\sqrt[3]{27\,000\,000}$

c) $\sqrt{8}$, $\sqrt{800}$, $\sqrt{80\,000}$

d) $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{24\,000}$, $\sqrt[3]{24\,000\,000}$

C

24. Dans ce schéma, la longueur de côté du plus grand carré est de 8 cm. Calcule la longueur de côté et l'aire de chaque carré plus petit. Écris les radicaux sous leur forme simplifiée.



25. Sachant que $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,2$, détermine une approximation décimale de chaque radical sans utiliser de calculatrice.

a) I) $\sqrt{200}$ II) $\sqrt{20\,000}$

b) I) $\sqrt{8}$ II) $\sqrt{18}$ III) $\sqrt{32}$ IV) $\sqrt{50}$

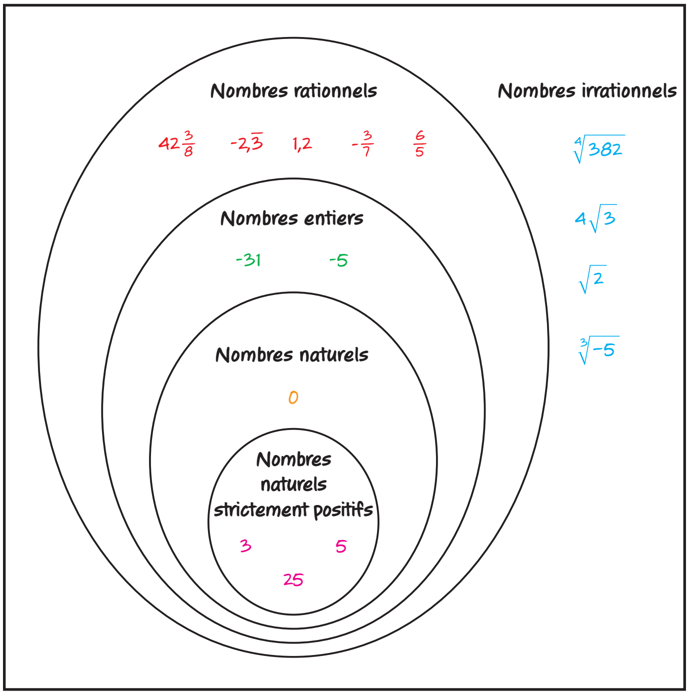
Réfléchis

Comment utilises-tu l'indice du radical quand tu simplifies un radical et quand tu écris, sous forme entière, un radical donné sous forme composée ? Donne des exemples.

PAUSE VÉRIFICATION 1

Liens

Les nombres réels



Présentation des concepts

- **Dans la leçon 4.1 :**
  - tu as utilisé tes connaissances sur les **racines carrées** pour explorer les **approximations décimales de racines cubiques et de racines quatrièmes ;**
  - tu as déterminé que **certains radicaux** peuvent être représentés comme des **nombres rationnels,** et d'autres non.
- **Dans la leçon 4.2 :**
  - tu as défini les **nombres irrationnels,** et tu as représenté ces nombres et les **nombres rationnels** comme étant l'**ensemble des nombres réels ;**
  - tu as **défini** les conditions dans lesquelles un **radical** a une **valeur numérique rationnelle,** et tu as **estimé** la valeur des **radicaux qui sont des nombres irrationnels.**
- **Dans la leçon 4.3,** tu as défini les **radicaux sous forme composée** et les **radicaux sous forme entière,** et tu as simplifié des radicaux au moyen de la décomposition en facteurs.

Évalue ta compréhension

4.1

1. Évalue chaque radical. Comment as-tu utilisé l'indice du radical ?

a) $\sqrt{81}$ **b)** $\sqrt[3]{-125}$ **c)** $\sqrt[4]{256}$ **d)** $\sqrt[5]{243}$

2. Estime la valeur de chaque radical, au centième près.
Comment peux-tu le faire sans utiliser les touches de racines d'une calculatrice ?

a) $\sqrt{10}$ **b)** $\sqrt[3]{15}$ **c)** $\sqrt[4]{9}$ **d)** $\sqrt[5]{23}$

3. La représentation décimale de $\sqrt[4]{60}$ est-elle finie, périodique, ou ni l'un ni l'autre ?
Justifie ta réponse.

4.2

4. Indique si chaque nombre est rationnel ou irrationnel. Justifie tes réponses.

a) $\sqrt{11}$ **b)** $\sqrt[3]{16}$ **c)** $\sqrt[3]{-16}$ **d)** $\sqrt{121}$ **e)** $\sqrt{\frac{121}{16}}$ **f)** $\sqrt{12{,}1}$

5. Pour chaque nombre irrationnel, trace une droite numérique et indique la position approximative du nombre. Décris tes stratégies.

a) $\sqrt{19}$ **b)** $\sqrt[3]{-20}$ **c)** $\sqrt[4]{30}$ **d)** $\sqrt[3]{36}$

6. **a)** Dessine un diagramme pour représenter l'ensemble des nombres réels.
Inscris chaque nombre à l'endroit approprié dans le diagramme.

I) $3\frac{1}{3}$ II) -42 III) $4{,}5$ IV) $-4{,}\overline{5}$

V) 0 VI) 14 VII) $\sqrt{7}$ VIII) π

b) Choisis un autre nombre pour chaque partie de ton diagramme, si possible.
Inscris chaque nombre à l'endroit approprié dans le diagramme.

7. **a)** Trace une droite numérique et situe chaque nombre sur la droite.

I) $\sqrt{32}$ II) $\sqrt[3]{72}$ III) $\sqrt[4]{100}$ IV) $\sqrt[3]{50}$ V) $\sqrt{65}$ VI) $\sqrt[4]{60}$

b) Place les nombres en a) par ordre décroissant.

8. Trace un carré. Indique son aire si :

a) le périmètre du carré est un nombre rationnel ;

b) le périmètre du carré est un nombre irrationnel.

4.3

9. Écris chaque radical sous forme simplifiée, lorsque c'est possible.

a) $\sqrt{45}$ **b)** $\sqrt[3]{96}$ **c)** $\sqrt{17}$ **d)** $\sqrt[4]{48}$ **e)** $\sqrt[3]{80}$ **f)** $\sqrt[4]{50}$

10. Choisis un radical de la question 9 qui peut être simplifié.
Écris les instructions pour simplifier le radical.

11. Réécris chaque radical sous forme entière.

a) $3\sqrt{7}$ **b)** $2\sqrt[3]{4}$ **c)** $7\sqrt{3}$ **d)** $2\sqrt[4]{12}$ **e)** $3\sqrt[3]{10}$ **f)** $6\sqrt{11}$

4.4 Les exposants rationnels et les radicaux

OBJECTIF DE LA LEÇON

Établir la relation entre les exposants rationnels et les radicaux.

Établis des liens

Le café, le thé et le chocolat chaud contiennent de la caféine. L'expression $100(0,87)^{\frac{1}{2}}$ représente le pourcentage de caféine qui reste dans ton organisme $\frac{1}{2}$ heure après que tu as bu une boisson caféinée.

Sachant que $0,87^1 = 0,87$ et $0,87^0 = 1$, comment peux-tu estimer $0,87^{\frac{1}{2}}$?

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.

A. Copie chaque tableau et remplis-le. Utilise une calculatrice.

x	$x^{\frac{1}{2}}$
1	$1^{\frac{1}{2}} =$
4	$4^{\frac{1}{2}} =$
9	
16	
25	

x	$x^{\frac{1}{3}}$
1	
8	
27	
64	
125	

Prolonge la régularité. Ajoute 3 rangées à chaque tableau.

B. Examine chaque tableau.

- Que remarques-tu à propos des nombres de la première colonne? Compare les nombres de la première et de la deuxième colonne. Quelles conclusions peux-tu tirer?
- Selon toi, que signifie l'exposant $\frac{1}{2}$? Fais d'autres essais à la calculatrice pour vérifier ta prédiction.
- Selon toi, que signifie l'exposant $\frac{1}{3}$? Fais d'autres essais à la calculatrice pour vérifier ta prédiction.

C. Selon toi, que signifient $a^{\frac{1}{4}}$ et $a^{\frac{1}{5}}$? Fais d'autres essais à la calculatrice pour vérifier tes prédictions pour différentes valeurs de a.

D. Que signifie $a^{\frac{1}{n}}$? Explique ton raisonnement.

En 9^e année, tu as appris que, pour les puissances qui ont une base entière et un exposant naturel:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Pour multiplier des puissances de même base, additionne les exposants.

Tu peux étendre cette loi aux puissances qui ont un exposant rationnel dont le numérateur est 1:

$$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1 = 5 \quad \text{et} \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$$

$5^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{5}$ sont des expressions équivalentes, c'est-à-dire que $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

De même,
$$5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 5^1 = 5 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{125} = 5$$

$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

Ces exemples indiquent:

- qu'élever un nombre à l'exposant $\frac{1}{2}$ équivaut à extraire sa racine carrée;
- qu'élever un nombre à l'exposant $\frac{1}{3}$ équivaut à extraire sa racine cubique, et ainsi de suite.

Les puissances qui ont un exposant rationnel dont le numérateur est 1

Si n est un nombre naturel strictement positif et que x est un nombre rationnel, alors $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Exemple 1 — Évaluer des puissances de la forme $a^{\frac{1}{n}}$

Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $27^{\frac{1}{3}}$ **b)** $0{,}49^{\frac{1}{2}}$ **c)** $(-64)^{\frac{1}{3}}$ **d)** $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

SOLUTION

Le dénominateur de l'exposant est l'indice du radical.

a) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27}$
$= 3$

b) $0{,}49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}49}$
$= 0{,}7$

c) $(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64}$
$= -4$

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}}$
$= \frac{2}{3}$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $1\ 000^{\frac{1}{3}}$ **b)** $0{,}25^{\frac{1}{2}}$

c) $(-8)^{\frac{1}{3}}$ **d)** $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

[Réponses : a) 10 ; b) 0,5 ; c) -2 ; d) $\frac{2}{3}$]

Comment peux-tu vérifier tes réponses ?

Puisque tu peux exprimer une fraction comme un nombre décimal, fini ou périodique, tu peux interpréter des puissances ayant un exposant décimal ; par exemple, si $0{,}2 = \frac{1}{5}$, alors $32^{0{,}2} = 32^{\frac{1}{5}}$.

Tu peux évaluer $32^{\frac{1}{5}}$ et $32^{0{,}2}$ à l'aide d'une calculatrice pour montrer que les deux expressions ont la même valeur.

```
32^(1/5)
                2
```

```
32^0.2
                2
```

Pourquoi utilises-tu des parenthèses pour évaluer la puissance quand l'exposant est une fraction, mais pas quand l'exposant est un nombre décimal ?

Pour saisir la signification d'une puissance telle que $8^{\frac{2}{3}}$, étends la loi des exposants $(a^m)^n = a^{mn}$ aux cas où m et n sont des nombres rationnels.

Écris l'exposant $\frac{2}{3}$ sous la forme $\frac{1}{3} \cdot 2$ ou $2 \cdot \frac{1}{3}$.

Alors, $8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3} \cdot 2}$
$= \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$
$= \left(\sqrt[3]{8}\right)^2$

Extrais la racine cubique de 8, puis élève le résultat au carré.

Alors, $8^{\frac{2}{3}} = 2^2$
$= 4$

ou

$8^{\frac{2}{3}} = 8^{2 \cdot \frac{1}{3}}$
$= (8^2)^{\frac{1}{3}}$
$= \sqrt[3]{8^2}$

Élève 8 au carré, puis extrais la racine cubique du résultat.

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64}$
$= 4$

Ces exemples illustrent que le numérateur d'un exposant rationnel représente une puissance et que son dénominateur représente une racine. L'ordre dans lequel tu évalues la racine et la puissance n'a pas d'importance.

Les puissances qui ont un exposant rationnel

Si m et n sont des nombres naturels strictement positifs et que x est un nombre rationnel, alors

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \quad \text{et} \quad x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Exemple 2 — Réécrire des puissances ayant un exposant rationnel sous la forme d'un radical et vice versa

a) Écris $40^{\frac{2}{3}}$ sous la forme d'un radical de 2 façons.

b) Écris $\sqrt{3^5}$ et $\left(\sqrt[3]{25}\right)^2$ sous la forme d'une puissance ayant un exposant rationnel.

SOLUTION

a) Applique $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ ou $\sqrt[n]{a^m}$.

$$40^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{40}\right)^2 \text{ ou } \sqrt[3]{40^2}$$

b) Applique $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

$$\sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}}$$

L'indice du radical est 2.

Applique $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$.

$$\left(\sqrt[3]{25}\right)^2 = 25^{\frac{2}{3}}$$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. **a)** Écris $26^{\frac{2}{5}}$ sous la forme d'un radical de 2 façons.

b) Écris $\sqrt{6^5}$ et $\left(\sqrt[4]{19}\right)^3$ sous la forme d'une puissance ayant un exposant rationnel.

[Réponses : a) $\left(\sqrt[5]{26}\right)^2$ ou $\sqrt[5]{26^2}$; b) $6^{\frac{5}{2}}$, $19^{\frac{3}{4}}$]

Exemple 3 — Évaluer des puissances qui ont un exposant rationnel et une base rationnelle

Évalue chaque expression.

a) $0{,}04^{\frac{3}{2}}$ **b)** $27^{\frac{4}{3}}$

c) $(-32)^{0{,}4}$ **d)** $1{,}8^{1{,}4}$

SOLUTION

a)
$$0{,}04^{\frac{3}{2}} = \left(0{,}04^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{0{,}04}\right)^3 = 0{,}2^3 = 0{,}008$$

b)
$$27^{\frac{4}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^4 = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$$

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Évalue chaque expression.

a) $0{,}01^{\frac{3}{2}}$ **b)** $(-27)^{\frac{4}{3}}$

c) $81^{\frac{3}{4}}$ **d)** $0{,}75^{1{,}2}$

[Réponses : a) 0,001 ; b) 81 ; c) 27 ; d) 0,708 0…]

c) L'exposant $0{,}4 = \frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$.

Donc, $(-32)^{0,4} = (-32)^{\frac{2}{5}}$
$= \left[(-32)^{\frac{1}{5}}\right]^2$
$= \left(\sqrt[5]{-32}\right)^2$
$= (-2)^2$
$= 4$

d) $1{,}8^{1,4}$

Utilise une calculatrice.

```
1.8^1.4
        2.277096874
```

$1{,}8^{1,4} = 2{,}277\ 0\ldots$

Dans les parties a) à c), tu as commencé par extraire la racine et évaluer les puissances. Évalue chaque puissance en commençant par élever la base à l'exposant. Quelle stratégie est la plus efficace ? Justifie ta réponse.

Exemple 4 Utiliser des exposants rationnels

Les biologistes utilisent la formule $c = 0{,}01m^{\frac{2}{3}}$ pour estimer la masse du cerveau, c, en kilogrammes, d'un mammifère ayant une masse corporelle de m kilogrammes. Estime la masse du cerveau de chaque animal.

a) un chien husky ayant une masse corporelle de 27 kg

b) un ours polaire ayant une masse corporelle de 200 kg

SOLUTION

Utilise la formule $c = 0{,}01m^{\frac{2}{3}}$.

a) Remplace m par 27.

$c = 0{,}01\,(27)^{\frac{2}{3}}$
$c = 0{,}01\left(\sqrt[3]{27}\right)^2$
$c = 0{,}01(3)^2$
$c = 0{,}01(9)$
$c = 0{,}09$

Applique la priorité des opérations. Commence par évaluer la puissance.

La masse du cerveau du husky est d'environ 0,09 kg.

b) Remplace m par 200.

$c = 0{,}01\,(200)^{\frac{2}{3}}$

Utilise une calculatrice.

```
0.01(200)^(2/3)
        0.341995189
```

La masse du cerveau de l'ours polaire est d'environ 0,34 kg.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

4. Estime la masse du cerveau de chaque animal à l'aide de la formule $c = 0{,}01m^{\frac{2}{3}}$.

a) un orignal ayant une masse corporelle de 512 kg

b) un chat ayant une masse corporelle de 5 kg

[Réponses : a) environ 0,64 kg ; b) environ 0,03 kg]

Pourquoi as-tu utilisé le calcul mental en a), mais une calculatrice en b) ?

Place à la discussion

1. Si a est un nombre rationnel et n est un nombre naturel strictement positif, que représente $a^{\frac{1}{n}}$?

2. Si a est un nombre rationnel, et m et n sont des nombres naturels strictement positifs, que représente $a^{\frac{m}{n}}$?

Exercices

A

3. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $16^{\frac{1}{2}}$ **b)** $36^{\frac{1}{2}}$ **c)** $64^{\frac{1}{3}}$

d) $32^{\frac{1}{5}}$ **e)** $(-27)^{\frac{1}{3}}$ **f)** $(-1\,000)^{\frac{1}{3}}$

4. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $100^{0,5}$ **b)** $81^{0,25}$

c) $1\,024^{0,2}$ **d)** $(-32)^{0,2}$

5. Écris chaque puissance sous la forme d'un radical.

a) $36^{\frac{1}{3}}$ **b)** $48^{\frac{1}{2}}$ **c)** $(-30)^{\frac{1}{5}}$

6. Écris chaque radical sous la forme d'une puissance.

a) $\sqrt{39}$ **b)** $\sqrt[4]{90}$

c) $\sqrt[3]{29}$ **d)** $\sqrt[5]{100}$

7. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) 8^0 **b)** $8^{\frac{1}{3}}$ **c)** $8^{\frac{2}{3}}$

d) $8^{\frac{3}{3}}$ **e)** $8^{\frac{4}{3}}$ **f)** $8^{\frac{5}{3}}$

B

8. Écris chaque puissance sous la forme d'un radical.

a) $4^{\frac{2}{3}}$ **b)** $(-10)^{\frac{3}{5}}$ **c)** $2{,}3^{\frac{3}{2}}$

9. Un cube a un volume de 350 cm³. Écris la longueur d'arête du cube sous la forme d'un radical et sous la forme d'une puissance.

10. Écris chaque puissance sous la forme d'un radical.

a) $48^{\frac{2}{3}}$ **b)** $(-1{,}8)^{\frac{5}{3}}$ **c)** $\left(\frac{3}{8}\right)^{2,5}$

d) $0{,}75^{0,75}$ **e)** $\left(-\frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{5}}$ **f)** $1{,}25^{1,5}$

11. Écris chaque radical sous la forme d'une puissance.

a) $\sqrt{3{,}8^3}$ **b)** $\left(\sqrt[3]{-1{,}5}\right)^2$ **c)** $\sqrt[4]{\left(\frac{9}{5}\right)^5}$

d) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{8}\right)^4}$ **e)** $\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^3$ **f)** $\sqrt[5]{(-2{,}5)^3}$

12. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $9^{\frac{3}{2}}$ **b)** $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ **c)** $(-27)^{\frac{2}{3}}$

d) $0{,}36^{1,5}$ **e)** $(-64)^{\frac{2}{3}}$ **f)** $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$

13. Écris une forme équivalente de chaque nombre à l'aide d'une puissance ayant l'exposant $\frac{1}{2}$, puis réécris la réponse sous la forme d'un radical.

a) 2 **b)** 4 **c)** 10 **d)** 3 **e)** 5

14. Écris une forme équivalente de chaque nombre à l'aide d'une puissance ayant l'exposant $\frac{1}{3}$, puis réécris la réponse sous la forme d'un radical.

a) -1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** -4 **e)** 4

15. Place ces nombres par ordre croissant. Décris ta stratégie.

$\sqrt[3]{4}$, $4^{\frac{3}{2}}$, 4^2, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

16. a) Évalue chaque puissance.

I) $16^{1,5}$ II) $81^{0,75}$ III) $(-32)^{0,8}$

IV) $35^{0,5}$ V) $1{,}21^{1,5}$ VI) $\left(\frac{3}{4}\right)^{0,6}$

b) Quelles puissances en a) aurais-tu pu évaluer sans utiliser de calculatrice ? Comment le sais-tu avant de les évaluer ?

17. La formule $h = 35d^{\frac{2}{3}}$, où d est le diamètre de la base, en mètres, permet d'estimer la hauteur, h, en mètres, d'une espèce de sapin. Détermine la hauteur approximative d'un sapin dont la base a un diamètre de 3,2 m à l'aide de la formule.

18. Un élève a évalué une puissance.

$$\begin{aligned} 1{,}96^{\frac{3}{2}} &= \left(\sqrt[3]{1{,}96}\right)^2 \\ &= (1{,}251\ 4\ldots)^2 \\ &= 1{,}566\ 1\ldots \end{aligned}$$

Trouve les erreurs de l'élève. Écris une solution juste.

19. La formule $A_t = 0{,}096m^{0{,}7}$, où m est la masse d'une personne, en kilogrammes, permet d'estimer l'aire totale d'une personne en mètres carrés. Calcule l'aire totale d'un enfant qui a une masse de 40 kg.

20. Voici une expression du pourcentage de caféine qu'il reste dans ton organisme n heures après que tu as bu une boisson caféinée :

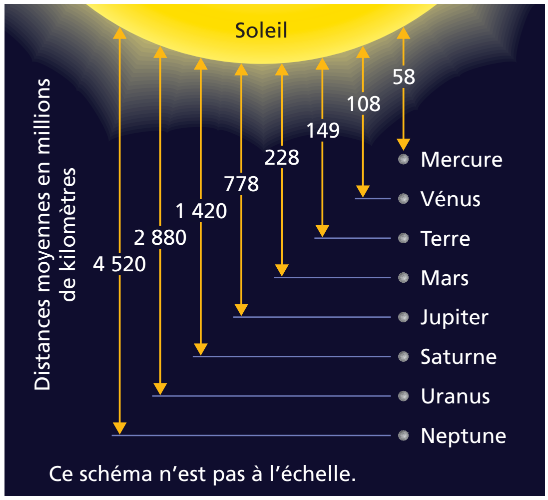
$100(0{,}5)^{\frac{n}{5}}$

a) Montre que cette expression et l'expression de la page 222 donnent le même résultat, à l'unité près, pour le pourcentage de caféine qu'il reste après $\frac{1}{2}$ heure.

b) Détermine le pourcentage de caféine qu'il reste après 1,5 heure à l'aide de l'expression ci-dessus.

c) Au bout de combien d'heures reste-t-il 50 % de la caféine absorbée ? Explique comment tu le sais.

21. À la fin du 16e siècle, Johannes Kepler a développé une formule afin de calculer le temps qu'une planète met à décrire une orbite autour du Soleil (appelé la *période*). La formule est $T \approx 0{,}2R^{\frac{3}{2}}$, où T est la période en jours terrestres et R est la distance moyenne de la planète au Soleil, en millions de kilomètres.



Ce schéma n'est pas à l'échelle.

La distance moyenne de la Terre au Soleil est d'environ 149 millions de kilomètres. La distance moyenne de Mars au Soleil est d'environ 228 millions de kilomètres. Quelle planète a la plus longue période, la Terre ou Mars ? Justifie ta réponse.

C

22. Deux élèves discutent de la signification de l'énoncé $3{,}2^{4{,}2} = 132{,}321\ 3...$
Luc dit : « Cela signifie que le nombre 3,2 multiplié par lui-même 4,2 fois égale environ 132,321 3. »
Karen dit : « Non, tu ne peux pas multiplier un nombre 4,2 fois. Tu peux écrire $3{,}2^{4{,}2}$ sous la forme $3{,}2^{\frac{42}{10}}$. Donc, l'énoncé signifie que 42 facteurs, chacun égal à la racine dixième de 3,2, multipliés ensemble donnent environ 132,321 3. » Qui a raison ? Justifie ta réponse.

Réfléchis

Dans la puissance $x^{\frac{m}{n}}$, m et n sont des nombres naturels strictement positifs et x est un nombre rationnel. Que représente le numérateur m ? Que représente le dénominateur n ? Donne un exemple.

Qu'est-ce qui doit être vrai à propos de x pour que $x^{\frac{m}{n}}$ soit un nombre rationnel ?

4.5 Les exposants négatifs et les inverses

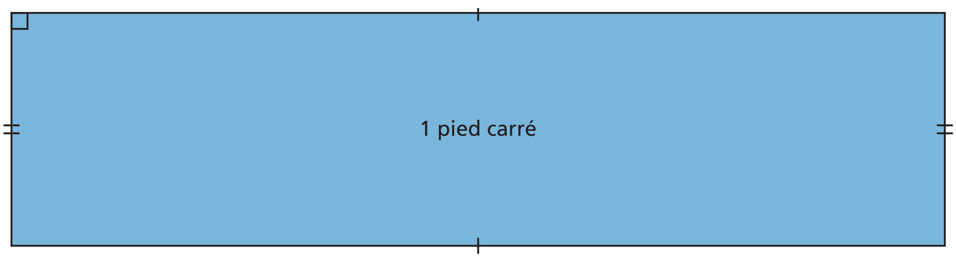
OBJECTIF DE LA LEÇON

Établir la relation entre les exposants négatifs et les inverses.

Les scientifiques peuvent calculer la vitesse de déplacement d'un dinosaure à partir de ses pistes. Ces pistes de dinosaures ont été découvertes près de Grand Cache, en Alberta.

Établis des liens

Un rectangle a une aire de 1 pied carré.
Énumère 5 paires de longueur et de largeur possibles pour ce rectangle.
Quelle est la relation entre les longueurs et les largeurs possibles?



Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.

Tu as besoin de papier quadrillé et de ciseaux.

A. Découpe un quadrillage de 16 sur 16. Détermine l'aire du quadrillage en unités carrées et sous la forme d'une puissance de 2. Note tes résultats dans un tableau semblable à celui ci-dessous.

Coupe	Aire (unités carrées)	Aire sous la forme d'une puissance de 2
Au départ	256	
1		
2		
3		

B. Découpe le quadrillage en deux et élimine une moitié. Note l'aire du morceau de quadrillage qu'il reste dans le tableau, en unités carrées et sous la forme d'une puissance de 2.

C. Refais l'étape B jusqu'à ce que tu ne puisses plus découper le quadrillage.

D. Prolonge les deuxième et troisième colonnes du tableau jusqu'à la coupe 13 à l'aide de régularités.

E. Compare les aires pour chaque paire de puissances dans le tableau :
- 2^{-1} et 2^1
- 2^{-2} et 2^2
- 2^{-3} et 2^3

Quelles relations remarques-tu ?

Deux nombres dont le produit est 1 sont des inverses.

Puisque $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$, les nombres 4 et $\frac{1}{4}$ sont des inverses.

De même, $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$, donc, les nombres $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont aussi des inverses.

Nous définissons les puissances ayant un exposant négatif de manière que les propriétés établies auparavant, par exemple $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ et $a^0 = 1$, s'appliquent toujours.

Applique ces propriétés.

$$\begin{aligned} 5^{-2} \cdot 5^2 &= 5^{-2+2} \\ &= 5^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Puisque le produit de 5^{-2} et de 5^2 est 1, 5^{-2} et 5^2 sont des inverses.

Ainsi, $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ et $\frac{1}{5^{-2}} = 5^2$

Autrement dit, $5^{-2} = \frac{1}{25}$

Cela suggère la définition suivante des puissances qui ont un exposant négatif.

Les puissances qui ont un exposant négatif

Si x est un nombre non nul et que n est un nombre rationnel, alors x^{-n} est l'inverse de x^n.

Autrement dit, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ et $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$, où $x \neq 0$

Pourquoi x ne peut-il pas être égal à 0 ?

Exemple 1 Évaluer des puissances qui ont un exposant entier négatif

Évalue chaque puissance.

a) 3^{-2} **b)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$ **c)** $0{,}3^{-4}$

SOLUTION

a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

$= \frac{1}{9}$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{3}\right)^3$

$= -\frac{64}{27}$

c) $0{,}3^{-4}$

Utilise une calculatrice.

```
0.3^-4
      123.4567901
```

$0{,}3^{-4} = 123{,}456\ 7\ldots$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Évalue chaque puissance.

a) 7^{-2} **b)** $\left(\frac{10}{3}\right)^{-3}$

c) $(-1{,}5)^{-3}$

[Réponses : a) $\frac{1}{49}$; b) $\frac{27}{1000}$; c) $-0{,}296\ 2\ldots$]

Il est possible d'appliquer la signification des exposants rationnels et des exposants négatifs afin d'évaluer des puissances ayant un exposant rationnel négatif. Par exemple, l'exposant rationnel de la puissance $8^{-\frac{2}{3}}$ indique les opérations définies ci-contre.

inverse

$8^{-\frac{2}{3}}$ ← carré (2) ← racine cubique (3)

Puisque l'exposant $-\frac{2}{3}$ est le produit de $(-1)\left(\frac{1}{3}\right)(2)$, et que l'ordre n'a pas d'importance dans la multiplication, tu peux effectuer les trois opérations associées à l'inverse, au carré et à la racine cubique dans n'importe quel ordre.

Exemple 2 Évaluer des puissances qui ont un exposant rationnel négatif

Évalue chaque puissance sans utiliser une calculatrice.

a) $8^{-\frac{2}{3}}$ **b)** $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$

(Suite de la solution à la page suivante)

SOLUTION

a) $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}}$ Réécris la puissance avec un exposant positif.

$= \dfrac{1}{(\sqrt[3]{8})^2}$ Extrais la racine cubique.

$= \dfrac{1}{2^2}$ Élève le résultat au carré.

$= \dfrac{1}{4}$

b) $\left(\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ Réécris la puissance avec un exposant positif.

$= \left(\sqrt{\dfrac{16}{9}}\right)^3$ Extrais la racine carrée.

$= \left(\dfrac{4}{3}\right)^3$ Élève le résultat au cube.

$= \dfrac{64}{27}$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

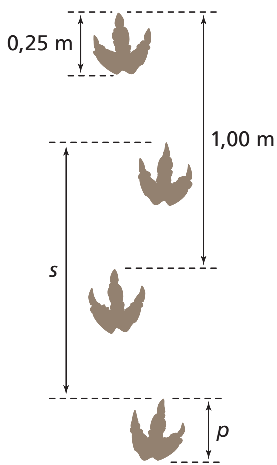
a) $16^{-\frac{5}{4}}$ **b)** $\left(\dfrac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$

[Réponses : a) $\frac{1}{32}$; b) $\frac{6}{5}$]

Quelles autres stratégies pourrais-tu utiliser pour évaluer les puissances ?

Exemple 3 Utiliser des exposants négatifs

Les paléontologistes utilisent les mesures des pistes de dinosaures qui se sont fossilisées et la formule $v = 0{,}155\,s^{\frac{5}{3}}p^{-\frac{7}{6}}$ pour estimer la vitesse de déplacement d'un dinosaure. Dans la formule, v est la vitesse en mètres à la seconde, s est la distance entre des empreintes successives du même pied et p est la longueur du pied en mètres.



Utilise les mesures fournies dans le schéma pour estimer la vitesse du dinosaure.

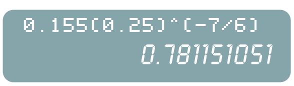
SOLUTION

Utilise la formule : $v = 0{,}155\,s^{\frac{5}{3}}p^{-\frac{7}{6}}$
Remplace s par 1 et p par 0,25.

$v = 0{,}155\,(1)^{\frac{5}{3}}\,(0{,}25)^{-\frac{7}{6}}$

$v = 0{,}155\,(0{,}25)^{-\frac{7}{6}}$

$v = 0{,}781\,1\ldots$



La vitesse du dinosaure était d'environ 0,8 m/s.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Utilise la formule $v = 0{,}155\,s^{\frac{5}{3}}p^{-\frac{7}{6}}$ pour estimer la vitesse du dinosaure si $s = 1{,}5$ et $p = 0{,}3$.

[Réponse : environ 1,2 m/s]

Quelle est la vitesse du dinosaure en kilomètres à l'heure ?

Place à la discussion

1. Sachant que m est un nombre entier, décris la relation entre a^m et a^{-m}.
2. Pourquoi y a-t-il habituellement plus d'une façon de déterminer la valeur d'une puissance de la forme $a^{-\frac{m}{n}}$? Donne des exemples.

Exercices

A

3. Copie et complète chaque énoncé.

a) $\dfrac{1}{5^4} = 5^{\square}$ b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = (-2)^{\square}$

c) $\dfrac{1}{3^{\square}} = 3^2$ d) $\dfrac{1}{4^{-2}} = 4^{\square}$

4. Évalue les puissances de chaque paire sans utiliser de calculatrice.

a) 4^2 et 4^{-2} b) 2^4 et 2^{-4}

c) 6^1 et 6^{-1} d) 4^3 et 4^{-3}

Décris les ressemblances et les différences entre tes réponses.

5. Si $2^{10} = 1\,024$, quelle est la valeur de 2^{-10} ?

6. Réécris chaque puissance avec un exposant positif.

a) 2^{-3} b) 3^{-5} c) $(-7)^{-2}$

7. Réécris chaque puissance avec un exposant positif.

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$ c) $\left(-\dfrac{6}{5}\right)^{-4}$

8. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) 3^{-2} b) 2^{-4} c) $(-2)^{-5}$

d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$ e) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ f) $\dfrac{1}{5^{-3}}$

B

9. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $4^{-\frac{1}{2}}$ b) $0{,}09^{-\frac{1}{2}}$

c) $27^{-\frac{1}{3}}$ d) $(-64)^{-\frac{1}{3}}$

e) $(-0{,}027)^{-\frac{2}{3}}$ f) $32^{-\frac{2}{5}}$

g) $9^{-\frac{3}{2}}$ h) $0{,}04^{-\frac{3}{2}}$

10. Écris une forme équivalente de chaque nombre à l'aide d'une puissance ayant un exposant négatif.

a) $\dfrac{1}{9}$ b) $\dfrac{1}{5}$ c) 4 d) -3

11. Quand tu déposes de l'argent dans un compte bancaire, la banque te verse des intérêts. Elle ajoute ces intérêts à ton capital et te verse ensuite des intérêts sur le nouveau montant. Il s'agit d'*intérêts composés*. Suppose que tu épargnes pour avoir 3 000 \$ dans 5 ans. Un compte d'épargne rapporte des intérêts composés de 2,5 %, calculés annuellement. Le capital, C, en dollars, que tu dois placer maintenant est donné par la formule $C = 3\,000(1{,}025)^{-5}$. Quel montant d'argent dois-tu placer maintenant pour avoir 3 000 \$ dans 5 ans ?

12. Une élève a évalué une puissance. Trouve toute erreur dans sa solution. Écris une solution juste.

$$\left(-\frac{64}{125}\right)^{-\frac{5}{3}} = \left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{5}{3}}$$
$$= \left(\sqrt[3]{\frac{64}{125}}\right)^5$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)^5$$
$$= \frac{1\,024}{3\,125}$$

13. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $27^{-\frac{4}{3}}$ b) $16^{-1,5}$ c) $32^{-0,4}$

d) $\left(-\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ e) $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$ f) $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}$

14. Le 1er janvier, Michelle veut placer assez d'argent pour verser 150 \$ à son neveu à la fin de chaque année pendant 10 ans. Le compte d'épargne rapporte des intérêts composés de 3,2 % annuellement. Le capital C, en dollars, que Michelle doit placer est donné par la formule $C = \dfrac{150[1 - 1{,}032^{-10}]}{0{,}032}$.
Quel montant d'argent Michelle doit-elle placer le 1er janvier ?

15. L'intensité d'une lumière à sa source est de 100 %. L'intensité, I, à une distance de d centimètres de la source est donnée par la formule $I = 100d^{-2}$. Détermine l'intensité de la lumière à 23 cm de la source.

16. Quelle puissance est la plus grande : 2^{-5} ou 5^{-2} ? Vérifie ta réponse.

17. **a)** Indique les régularités dans cette liste.

$16 = 2^4$
$8 = 2^3$
$4 = 2^2$

b) Prolonge la suite en a) vers le bas. Écris les 5 prochaines rangées.

c) Explique comment la régularité montre que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

18. Combien de fois la puissance 3^3 est-elle plus grande que 3^{-5} ? Exprime ta réponse sous la forme d'une puissance et en notation standard.

19. Que sais-tu à propos du signe de l'exposant dans chaque cas ? Justifie tes réponses.

a) $3^x > 1$ **b)** $3^x < 1$ **c)** $3^x = 1$

C

20. Lorsqu'un nombre est affecté d'un exposant négatif, la valeur de la puissance est-elle toujours inférieure à 1 ? Donne un exemple.

21. Une force gravitationnelle de F newtons s'exerce entre la Terre et la Lune. Elle est définie par la formule $F = (6{,}67 \times 10^{-11})Mmr^{-2}$, où M est la masse de la Terre en kilogrammes, m est la masse de la Lune en kilogrammes et r est la distance entre la Terre et la Lune en mètres. La masse de la Terre est d'environ $5{,}973\,6 \times 10^{24}$ kg. La masse de la Lune est d'environ $7{,}349 \times 10^{22}$ kg. La distance moyenne entre elles est d'environ 382 260 km.

a) Quelle est la force gravitationnelle qui s'exerce entre la Terre et la Lune ?

b) En fait, la valeur r est la distance entre les centres de la Terre et de la Lune. Fais une recherche pour trouver les diamètres de la Terre et de la Lune. Calcule la force gravitationnelle en tenant compte de cette nouvelle valeur de r.

Réfléchis

Explique ce que signifie un exposant négatif. Montre ton raisonnement à l'aide d'exemples.

L'UNIVERS DES MATHS

Fait inusité : Les ordinateurs et π

C'est au 18e siècle seulement qu'on a réussi à démontrer le caractère irrationnel de π, le plus célèbre de tous les nombres irrationnels. Au cours de l'histoire, un grand nombre de mathématiciens ont consacré beaucoup de temps à déterminer les décimales de π. Cela n'avait aucune valeur pratique, mais a conduit à certaines découvertes qui ont influé sur les mathématiques modernes. En 1949, un ordinateur de première génération a calculé π jusqu'à la 2 000e décimale, ce qui dépassait les résultats des calculs à la main antérieurs. De nos jours, le calcul des décimales de π constitue une façon d'évaluer la puissance, la vitesse et l'exactitude des superordinateurs. Des ordinateurs ont déterminé plus de 6 milliards de chiffres du nombre π. Il est même possible de programmer un ordinateur personnel pour qu'il calcule π à des millions de décimales en quelques heures. Ce t-shirt montre les 100 premiers chiffres de π.

PAUSE VÉRIFICATION 2

Liens

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

$\downarrow$ Lorsque $m = \frac{1}{n}$

$$\boxed{\begin{aligned}(a^{\frac{1}{n}})^n &= a^{\frac{1}{n}\cdot n}\\ &= a^1\\ &= a\end{aligned}}$$

$\downarrow$ La définition d'un radical

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

$\downarrow$ $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ et $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$

$$\boxed{\begin{aligned}a^{\frac{m}{n}} &= (\sqrt[n]{a})^m\\ a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m}\end{aligned}}$$

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$\downarrow$ Lorsque $m = -n$

$$\boxed{\begin{aligned}a^n \cdot a^{-n} &= a^{n+(-n)}\\ &= a^0\\ &= 1\end{aligned}}$$

$\downarrow$ La définition d'un inverse

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$\downarrow$ Lorsque n est un nombre rationnel

$$\boxed{a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}}$$

$\downarrow$ L'inverse d'une fraction

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}}$$

Présentation des concepts

- **Dans la leçon 4.4 :**
  - tu as expliqué la signification d'un exposant de la forme $\frac{1}{n}$ à l'aide de régularités ;
  - tu as appliqué la loi des exposants relative à la puissance d'une puissance afin d'expliquer pourquoi **une puissance ayant l'exposant $\frac{1}{n}$ est la n^e racine de la base de la puissance.**
- **Dans la leçon 4.5 :**
  - tu as expliqué la signification d'un exposant négatif à l'aide de régularités ;
  - tu as appliqué la loi des exposants relative au produit de puissances afin d'expliquer pourquoi **une puissance ayant un exposant rationnel négatif s'écrit sous la forme d'un inverse.**

Évalue ta compréhension

4.4

1. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $16^{\frac{1}{4}}$ **b)** $49^{0,5}$ **c)** $(-64)^{\frac{2}{3}}$ **d)** $\left(\frac{49}{9}\right)^{1,5}$ **e)** $(-8)^{\frac{5}{3}}$

2. **a)** Écris chaque puissance sous la forme d'un radical.

I) $35^{\frac{2}{3}}$ II) $32^{\frac{3}{2}}$ III) $(-32)^{\frac{2}{5}}$

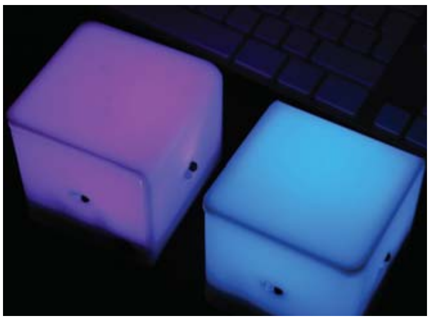
IV) $400^{1,5}$ V) $(-125)^{\frac{1}{3}}$ VI) $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$

b) Évalue chaque radical en a) sans utiliser de calculatrice, si possible. Explique pourquoi tu n'as pas pu évaluer certains radicaux.

3. Écris chaque radical sous la forme d'une puissance.

a) $\sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt{9}$ **c)** $\sqrt[4]{18}$ **d)** $\left(\sqrt{10}\right)^3$ **e)** $\left(\sqrt[3]{-10}\right)^2$

4. Le temps de circulation est le temps moyen nécessaire pour que le sang circule dans tout le corps et retourne au cœur. La formule $T \approx 17{,}4m^{\frac{1}{4}}$, où T est le temps de circulation en secondes et m est la masse corporelle en kilogrammes, permet d'estimer le temps de circulation chez un mammifère. Estime le temps de circulation chez un mammifère d'une masse de 85 kg.



5. Place ces nombres par ordre croissant.

$3^{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{3}, \left(\sqrt{3}\right)^5, 3^{\frac{2}{3}}, \left(\sqrt[3]{3}\right)^4$

6. Un AudioCube permet de générer des sons et des motifs musicaux. Chaque cube transmet, sans fil, des données musicales aux cubes à proximité. Le volume d'un AudioCube est de 421 875 mm^3. Écris la longueur d'arête du cube sous la forme d'un radical et d'une puissance, puis calcule la longueur d'arête.

4.5

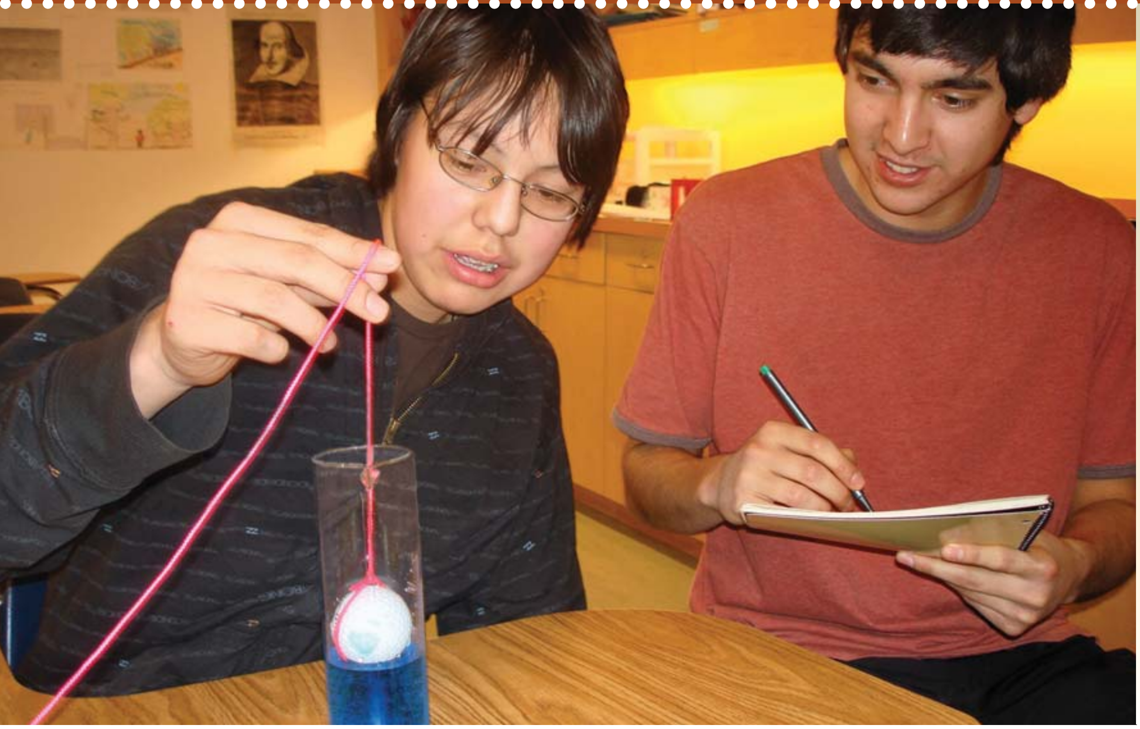
7. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ **b)** $0{,}5^{-2}$ **c)** $(-1\ 000)^{-\frac{2}{3}}$

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **e)** $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$ **f)** $(-0{,}008)^{-\frac{4}{3}}$

8. Suppose que tu veux avoir 5 000 \$ dans 3 ans. Un compte d'épargne rapporte des intérêts composés de 2,9 %, calculés annuellement. Le capital, C, en dollars, que tu dois placer maintenant est donné par la formule $C = 5\ 000(1{,}029)^{-3}$. Quel montant d'argent dois-tu placer maintenant pour avoir 5 000 \$ dans 3 ans ?

4.6 Appliquer les lois des exposants



OBJECTIF DE LA LEÇON

Simplifier des expressions à l'aide des lois des exposants.

Un cylindre gradué permet de déterminer le volume d'une sphère. On peut ensuite calculer le rayon à l'aide des lois des exposants.

Établis des liens

Rappelle-toi les lois des exposants pour les bases entières et les exposants naturels.

Produit de puissances: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Quotient de puissances: $a^m \div a^n = a^{m-n}$, où $a \neq 0$

Puissance d'une puissance: $(a^m)^n = a^{mn}$

Puissance d'un produit: $(ab)^m = a^m b^m$

Puissance d'un quotient: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, où $b \neq 0$

Quels autres types de nombres peuvent constituer une base? un exposant? Comment utiliserais-tu les lois des exposants pour évaluer une expression qui comporte de tels nombres?

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille de façon individuelle.

Quelle est la valeur de $\left(\frac{a^6b^9}{a^5b^8}\right)^{-2}$ lorsque $a = -3$ et $b = 2$?

Compare ta stratégie avec celle d'une ou d'un camarade.
Si tu as utilisé la même stratégie, trouve une stratégie différente.
Quelle stratégie est la plus efficace, et pourquoi?

Les lois des exposants permettent de simplifier des expressions qui comportent des bases rationnelles. Par convention, on écrit la puissance simplifiée avec un exposant positif.

Exemple 1 Simplifier des expressions numériques comportant des bases rationnelles

Simplifie chaque expression en une seule puissance. Explique ton raisonnement.

a) $0{,}3^{-3} \cdot 0{,}3^{5}$

b) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}\right]^{2} \cdot \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{3}$

c) $\frac{(1{,}4^{3})(1{,}4^{4})}{1{,}4^{-2}}$

d) $\left(\frac{7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}\right)^{6}$

SOLUTION

a) $0{,}3^{-3} \cdot 0{,}3^{5}$

Applique la loi du produit de puissances : lorsque les puissances ont la même base, on additionne les exposants.

$$\begin{aligned} 0{,}3^{-3} \cdot 0{,}3^{5} &= 0{,}3^{(-3)+5} \\ &= 0{,}3^{2} \end{aligned}$$

b) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}\right]^{2} \cdot \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{3}$

Applique d'abord la loi de la puissance d'une puissance : pour chaque puissance, on multiplie les exposants.

$$\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}\right]^{2} \cdot \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{(-4)(2)} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{(2)(3)}$$

Applique ensuite la loi du produit de puissances.

$$\begin{aligned} \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}\right]^{2} \cdot \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{3} &= \left(-\frac{3}{2}\right)^{-8} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{6} \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right)^{2} \end{aligned}$$

Réécris la puissance avec un exposant positif.

c)

$$\begin{aligned} &\frac{(1{,}4^{3})(1{,}4^{4})}{1{,}4^{-2}} \\ &= \frac{1{,}4^{3+4}}{1{,}4^{-2}} \\ &= \frac{1{,}4^{7}}{1{,}4^{-2}} \\ &= 1{,}4^{7-(-2)} \\ &= 1{,}4^{9} \end{aligned}$$

Applique la loi du produit de puissances.

Applique la loi du quotient de puissances.

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Simplifie chaque expression en une seule puissance. Explique ton raisonnement.

a) $0{,}8^{2} \cdot 0{,}8^{-7}$

b) $\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^{2}\right]^{-3} \div \left[\left(-\frac{4}{5}\right)^{4}\right]^{-5}$

c) $\frac{(1{,}5^{-3})^{-5}}{1{,}5^{5}}$

d) $\frac{9^{\frac{5}{4}} \cdot 9^{-\frac{1}{4}}}{9^{\frac{3}{4}}}$

[Réponses : a) $\frac{1}{0{,}8^{5}}$; b) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{14}$; c) $1{,}5^{10}$; d) $9^{\frac{1}{4}}$]

d) $\left(\dfrac{7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}\right)^6$ Applique la loi du produit de puissances.

$= \left(\dfrac{7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}}\right)^6$

$= \left(\dfrac{7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{6}{3}}}\right)^6$ Applique la loi du quotient de puissances.

$= \left(7^{\frac{2}{3}-\frac{6}{3}}\right)^6$

$= \left(7^{-\frac{4}{3}}\right)^6$ Applique la loi de la puissance d'une puissance.

$= 7^{\left(-\frac{4}{3}\right)(6)}$

$= 7^{-\frac{24}{3}}$

$= 7^{-8}$ Réécris la puissance avec un exposant positif.

$= \dfrac{1}{7^8}$

Quelle autre stratégie pourrais-tu utiliser en d) ? Quelle stratégie est la plus efficace ?

Exemple 2 Simplifier des expressions algébriques comportant des exposants entiers

Simplifie chaque expression. Explique ton raisonnement.

a) $(x^3y^2)(x^2y^{-4})$ **b)** $\dfrac{10a^5b^3}{2a^2b^{-2}}$

SOLUTION

a) $(x^3y^2)(x^2y^{-4}) = x^3 \cdot y^2 \cdot x^2 \cdot y^{-4}$ x^3y^2 équivaut à $x^3 \cdot y^2$

$= x^3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot y^{-4}$ Applique la loi du produit de puissances.

$= x^{3+2} \cdot y^{2+(-4)}$ Réécris la puissance avec un exposant positif.

$= x^5 \cdot y^{-2}$

$= x^5 \cdot \dfrac{1}{y^2}$

$= \dfrac{x^5}{y^2}$

b) $\dfrac{10a^5b^3}{2a^2b^{-2}} = \dfrac{10}{2} \cdot \dfrac{a^5}{a^2} \cdot \dfrac{b^3}{b^{-2}}$ Applique la loi du quotient de puissances.

$= 5 \cdot a^{5-2} \cdot b^{3-(-2)}$

$= 5 \cdot a^3 \cdot b^5$

$= 5a^3b^5$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Simplifie chaque expression. Explique ton raisonnement.

a) $m^4n^{-2} \cdot m^2n^3$

b) $\dfrac{6x^4y^{-3}}{14xy^2}$

[Réponses : a) m^6n; b) $\frac{3x^3}{7y^5}$]

Exemple 3 Simplifier des expressions algébriques comportant des exposants rationnels

Simplifie chaque expression. Explique ton raisonnement.

a) $(8a^3b^6)^{\frac{1}{3}}$

b) $(x^{\frac{3}{2}}y^2)(x^{\frac{1}{2}}y^{-1})$

c) $\dfrac{4a^{-2}b^{\frac{2}{3}}}{2a^2b^{\frac{1}{3}}}$

d) $\left(\dfrac{100a}{25a^5b^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

SOLUTION

a) $(8a^3b^6)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot a^{3\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot b^{6\left(\frac{1}{3}\right)}$

Applique la loi de la puissance d'une puissance.

$= (2^3)^{\frac{1}{3}} \cdot a^1 \cdot b^2$

$= 2ab^2$

b) $(x^{\frac{3}{2}}y^2)(x^{\frac{1}{2}}y^{-1}) = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^2 \cdot y^{-1}$

Applique la loi du produit de puissances.

$= x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} \cdot y^{2+(-1)}$

$= x^2y$

c) $\dfrac{4a^{-2}b^{\frac{2}{3}}}{2a^2b^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{a^{-2}}{a^2} \cdot \dfrac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$

Applique la loi du quotient de puissances.

$= 2 \cdot a^{(-2)-2} \cdot b^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}$

$= 2 \cdot a^{-4} \cdot b^{\frac{1}{3}}$

Réécris la puissance avec un exposant positif.

$= \dfrac{2b^{\frac{1}{3}}}{a^4}$

d) $\left(\dfrac{100a}{25a^5b^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{100}{25} \cdot \dfrac{a^1}{a^5} \cdot \dfrac{1}{b^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

Commence à l'intérieur des parenthèses.
Applique la loi du quotient de puissances.
Réécris la puissance avec un exposant positif.

$= \left(4 \cdot a^{1-5} \cdot b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(4 \cdot a^{-4} \cdot b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

Applique la loi de la puissance d'une puissance.

$= 4^{\frac{1}{2}} \cdot a^{(-4)\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot b^{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$

$= 2 \cdot a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{4}}$

Réécris la puissance avec un exposant positif.

$= \dfrac{2b^{\frac{1}{4}}}{a^2}$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Simplifie chaque expression. Explique ton raisonnement.

a) $(25a^4b^2)^{\frac{3}{2}}$

b) $(x^3y^{-\frac{3}{2}})(x^{-1}y^{\frac{1}{2}})$

c) $\dfrac{12x^{-5}y^{\frac{5}{2}}}{3x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}}$

d) $\left(\dfrac{50x^2y^4}{2x^4y^7}\right)^{\frac{1}{2}}$

[Réponses : a) $125a^6b^3$; b) $\dfrac{x^2}{y}$; c) $\dfrac{4y^3}{x^{\frac{11}{2}}}$; d) $\dfrac{5}{xy^{\frac{3}{2}}}$]

Exemple 4 Résoudre des problèmes à l'aide des lois des exposants

Une sphère a un volume de 425 m^3.
Quel est le rayon de la sphère, au dixième de mètre près ?

SOLUTION

Le volume V d'une sphère de rayon r est donné par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Remplace V par 425, puis résous l'équation r.

$$425 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Multiplie chaque membre de l'équation par 3.

$$3(425) = 3\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$1\,275 = 4\pi r^3$$

Divise chaque membre de l'équation par 4π.

$$\frac{1\,275}{4\pi} = \frac{4\pi r^3}{4\pi}$$

$$\frac{1\,275}{4\pi} = r^3$$

Pour résoudre l'équation r, extrais la racine cubique de chaque membre en l'élevant à la puissance un tiers.

$$\left(\frac{1\,275}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (r^3)^{\frac{1}{3}}$$

Applique la loi de la puissance d'une puissance.

$$\left(\frac{1\,275}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = r$$

```
3√(1275/(4π))
     4.664088405
```

$$r = 4{,}664\,0\ldots$$

Le rayon de la sphère est d'environ 4,7 m.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

4. Un cône dont la hauteur est égale à son rayon a un volume de 18 cm^3. Détermine le rayon et la hauteur du cône, au dixième de centimètre près.

[Réponse : environ 2,6 cm]

Comment sais-tu que la longueur du rayon est un nombre irrationnel ?

Place à la discussion

1. Suppose que tu veux évaluer une expression algébrique pour des valeurs données des variables. Pourquoi peut-il être utile de commencer par simplifier l'expression ?

2. Quand tu simplifies une expression, comment sais-tu quelle loi des exposants tu dois appliquer en premier ?

Exercices

Écris toutes les puissances avec un exposant positif.

A

3. Simplifie chaque expression.

a) $x^3 \cdot x^4$ **b)** $a^2 \cdot a^{-5}$
c) $b^{-3} \cdot b^5$ **d)** $m^2 \cdot m^{-3}$

4. Écris chaque expression sous la forme d'une seule puissance.

a) $0{,}5^2 \cdot 0{,}5^3$ **b)** $0{,}5^2 \cdot 0{,}5^{-3}$
c) $\frac{0{,}5^2}{0{,}5^3}$ **d)** $\frac{0{,}5^2}{0{,}5^{-3}}$

5. Simplifie chaque expression.

a) $\frac{x^4}{x^2}$ **b)** $\frac{x^2}{x^5}$
c) $n^6 \div n^5$ **d)** $\frac{a^2}{a^6}$

6. Simplifie chaque expression.

a) $(n^2)^3$ **b)** $(z^2)^{-3}$
c) $(n^{-4})^{-3}$ **d)** $(c^{-2})^2$

7. Écris chaque expression sous la forme d'une seule puissance.

a) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]^4$ b) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]^{-4}$

c) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right]^{-4}$ d) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}\right]^{-4}$

8. Simplifie chaque expression.

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ b) $\left(\frac{n^2}{m}\right)^3$

c) $\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^{-4}$ d) $\left(\frac{2b}{5c}\right)^2$

e) $(ab)^2$ f) $(n^2m)^3$

g) $(c^3d^2)^{-4}$ h) $(xy^{-1})^3$

B

9. Simplifie chaque expression. Nomme la loi des exposants que tu utilises.

a) $x^{-3} \cdot x^4$ b) $a^{-4} \cdot a^{-1}$

c) $b^4 \cdot b^{-3} \cdot b^2$ d) $m^8 \cdot m^{-2} \cdot m^{-6}$

e) $\frac{x^{-5}}{x^2}$ f) $\frac{s^5}{s^{-5}}$

g) $\frac{b^{-8}}{b^{-3}}$ h) $\frac{t^{-4}}{t^{-4}}$

10. Évalue chaque expression.

a) $1{,}5^{\frac{3}{2}} \cdot 1{,}5^{\frac{1}{2}}$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{4}}$

c) $(-0{,}6)^{\frac{1}{3}} \cdot (-0{,}6)^{\frac{5}{3}}$ d) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{4}{3}}$

e) $\frac{0{,}6^{\frac{1}{2}}}{0{,}6^{\frac{3}{2}}}$ f) $\frac{\left(-\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}}$

g) $\frac{0{,}49^{\frac{5}{2}}}{0{,}49^4}$ h) $\frac{0{,}027^{\frac{5}{3}}}{0{,}027^{\frac{4}{3}}}$

11. Simplifie chaque expression. Explique ton raisonnement.

a) $(x^{-1}y^{-2})^{-3}$ b) $(2a^{-2}b^2)^{-2}$

c) $(4m^2n^3)^{-3}$ d) $\left(\frac{3}{2}m^{-2}n^{-3}\right)^{-4}$

12. Un cône dont la hauteur est égale à son rayon a un volume de 1 234 cm^3. Quelle est la hauteur du cône, au dixième de centimètre près ?

13. Une sphère a un volume de 375 pieds cubes. Quelle est l'aire totale de la sphère, au pied carré près ?

14. Simplifie chaque expression. Quelles lois des exposants utilises-tu ?

a) $\frac{(a^2b^{-1})^{-2}}{(a^{-3}b)^3}$ b) $\left(\frac{(c^{-3}d)^{-1}}{c^2d}\right)^{-2}$

15. Évalue chaque expression si $a = -2$ et $b = 1$. Explique ta stratégie.

a) $(a^3b^2)(a^2b^3)$ b) $(a^{-1}b^{-2})(a^{-2}b^{-3})$

c) $\frac{a^{-4}b^5}{ab^3}$ d) $\left(\frac{a^{-7}b^7}{a^{-9}b^{10}}\right)^{-5}$

16. Simplifie chaque expression.

a) $m^{\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{4}{3}}$ b) $x^{-\frac{3}{2}} \div x^{-\frac{1}{4}}$

c) $\frac{-9a^{-4}b^{\frac{3}{4}}}{3a^2b^{\frac{1}{4}}}$ d) $\left(\frac{-64c^6}{a^9b^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}$

17. Trouve toute erreur dans chaque simplification. Écris une solution juste.

a) $(x^2y^{-3})(x^{\frac{1}{2}}y^{-1}) = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-3} \cdot y^{-1}$
$= x^1 \cdot y^3$
$= xy^3$

b) $\left(\frac{-5a^2}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2} = \frac{10a^{-4}}{b^{-1}}$
$= \frac{10b}{a^4}$

18. Explique comment utiliser un cylindre gradué contenant de l'eau pour calculer le diamètre d'une bille qui peut y être insérée.

19. Trouve les erreurs dans chaque simplification. Écris la solution juste.

a) $\frac{(m^{-3} \cdot n^2)^{-4}}{(m^2 \cdot n^{-3})^2} = (m^{-5} \cdot n^5)^{-6}$
$= m^{30} \cdot n^{30}$
$= (mn)^{30}$

b) $\left(r^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(r^{-\frac{1}{4}} \cdot s^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = r^1 \cdot s^{-1} \cdot r^{-\frac{5}{4}} \cdot s^{-\frac{1}{2}}$
$= r^{1-\frac{5}{4}} \cdot s^{-1-\frac{1}{2}}$
$= r^{-\frac{1}{4}} \cdot s^{-\frac{3}{2}}$
$= \frac{1}{r^{\frac{1}{4}} \cdot s^{\frac{3}{2}}}$

20. Les formats de papier ISO A0, A1, A2, ... sont courants à l'extérieur de l'Amérique du Nord. Pour tout nombre naturel n, la largeur d'une feuille de papier de format An est égale à $2^{-\frac{2n+1}{4}}$ mètres et sa longueur est égale à $2^{-\frac{2n-1}{4}}$ mètres.

a) Écris des expressions représentant les dimensions de chaque format de papier et simplifie-les. Évalue chaque mesure au millimètre près.

I) A3 II) A4 III) A5

b) Suppose qu'une feuille de chaque format en a) est pliée en deux le long d'une ligne perpendiculaire à sa longueur. Écris des expressions représentant les dimensions de chaque partie obtenue et simplifie-les.

c) Compare tes résultats en a) et en b). Que remarques-tu ?

C

21. Simplifie chaque expression. Montre ce que tu as fait.

a) $\left(\dfrac{a^{-3}b}{c^{2}}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{c^{5}}{a^{4}b^{-3}}\right)^{-1}$ **b)** $\dfrac{(2a^{-1}b^{4}c^{-3})^{-2}}{(4a^{2}bc^{-4})^{2}}$

22. Sachant que $x = a^{-2}$ et $y = a^{\frac{2}{3}}$, écris chaque expression en fonction de a.

a) $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{2}$ **b)** $\left(x^{\frac{3}{4}} \div y^{-\frac{1}{2}}\right)^{3}$

23. Écris 3 expressions différentes de chaque résultat.

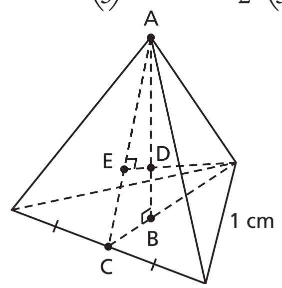
a) $x^{\frac{3}{2}}$ est le produit de deux puissances ayant un exposant rationnel.

b) $x^{\frac{3}{2}}$ est le quotient de deux puissances ayant un exposant rationnel.

c) $x^{\frac{3}{2}}$ est le résultat de l'élévation d'une puissance ayant un exposant rationnel à un exposant rationnel.

24. La longueur d'arête d'un tétraèdre régulier est de 1 cm. Le tétraèdre tient dans une sphère de manière que tous ses sommets touchent à la sphère. Le point D est le centre de la sphère. Voici les mesures en centimètres de 3 segments de droite :

$\overline{AB} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\overline{AC} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\overline{AE} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$



Sachant que le △ABC est semblable au △AED et que $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$, détermine la longueur de $\overline{AD}$.

Réfléchis

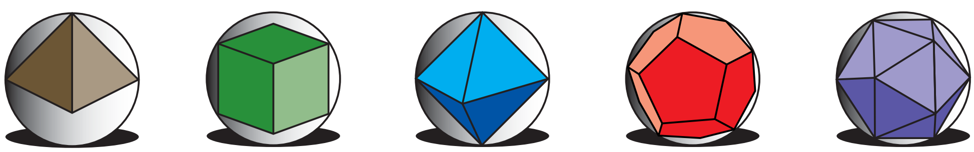
Explique comment simplifier des expressions algébriques à l'aide des lois des exposants. Donne des exemples des types d'expressions que tu peux simplifier.

L'UNIVERS DES MATHS

Fait inusité : Les solides platoniciens

Les solides platoniciens (ou solides de Platon) sont les seuls polyèdres réguliers qu'il est possible de faire tenir dans une sphère de telle façon que chaque sommet touche la sphère. Vers 300 avant notre ère, Euclide a utilisé la trigonométrie, les triangles semblables et le théorème de Pythagore pour montrer le rapport entre la longueur d'arête de chaque solide platonicien et le diamètre de la sphère :

le tétraèdre — le cube — l'octaèdre — le dodécaèdre — l'icosaèdre



$1 : \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ $1 : 3^{\frac{1}{2}}$ $1 : 2^{\frac{1}{2}}$ $1 : \dfrac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{2}} + 15^{\frac{1}{2}}\right)$ $1 : \dfrac{1}{2}\left(10 + 2(5)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

AIDE-MÉMOIRE

RÉSUMÉ DES CONCEPTS

Concepts clés	Applications
Tout nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{m}{n}$ (où $n \neq 0$ et où m et n sont des nombres entiers) est un nombre rationnel.	Ce que cela signifie en pratique : Si un nombre réel peut s'exprimer sous la forme d'un nombre décimal fini ou périodique, il est rationnel ; sinon, il est irrationnel.
Les exposants peuvent servir à représenter des racines et l'inverse de nombres rationnels.	Le numérateur d'un exposant rationnel représente une puissance, tandis que le dénominateur représente une racine. Un exposant négatif indique un inverse.
Les lois des exposants s'appliquent aux puissances ayant des bases rationnelles et variables ainsi que des exposants rationnels.	Les lois des exposants peuvent servir à simplifier des expressions comportant des exposants rationnels.

Retour sur le chapitre

- Comment peux-tu prédire si la valeur d'un radical sera un nombre rationnel ou un nombre irrationnel ?
- Comment les lois des exposants ont-elles servi à créer des définitions des exposants négatifs et des exposants rationnels ?
- Que signifie exactement « simplifier une expression comportant des radicaux ou des exposants » ?

L'UNIVERS DES MATHS

Le monde du travail : La planification financière

Le secteur des services financiers offre plusieurs possibilités de carrière, notamment dans les services bancaires, l'assurance, les sociétés de placement et les cabinets privés. Les planificateurs financiers utilisent les mathématiques et la technologie afin d'explorer différentes options de placement et de conseiller leur clientèle. La capacité de comprendre, de manipuler et d'évaluer des formules algébriques comportant des exposants rationnels leur est essentielle.

RÉSUMÉ DES HABILETÉS

Habiletés	Description	Exemple
Classer des nombres. [4.1, 4.2]	Pour déterminer si un nombre est rationnel ou irrationnel, écris-le en notation décimale. ■ Les nombres décimaux finis ou périodiques sont rationnels. ■ Les nombres décimaux qui ne sont ni finis ni périodiques sont des nombres irrationnels.	Nombres rationnels : $2,\ 0,\ -3,\ 3{,}75,\ 0{,}0\overline{1},$ $\frac{3}{5},\ -\frac{10}{7}$ Nombres irrationnels : $\sqrt{3},\ \pi$
Simplifier des radicaux. [4.3]	Pour simplifier une racine carrée : **1.** écris le radicande sous la forme du produit du plus grand facteur carré parfait et d'un autre nombre ; **2.** extrais la racine carrée du facteur carré parfait. Un procédé semblable s'applique aux racines cubiques et aux racines plus élevées.	$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2}$ $= \sqrt{100} \cdot \sqrt{2}$ $= 10\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{8 \cdot 25}$ $= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{25}$ $= 2\sqrt[3]{25}$
Évaluer des puissances. [4.4, 4.5]	Pour évaluer des puissances sans utiliser de calculatrice : **1.** réécris une puissance ayant un exposant négatif comme une puissance ayant un exposant positif ; **2.** représente les puissances ayant un exposant rationnel sous la forme de radicaux ; **3.** évalue les puissances et simplifie les racines à l'aide du calcul mental.	$64^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}}$ $= \frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2}$ $= \frac{1}{4^2}$ $= \frac{1}{16}$
Simplifier des expressions à l'aide des lois des exposants. [4.6]	Pour simplifier des expressions comportant des puissances : **1.** élimine les parenthèses à l'aide des lois du produit de puissances, du quotient de puissances et de la puissance d'une puissance ; **2.** écris la forme simplifiée avec des exposants positifs.	$\left(\frac{(xy^2)^3}{x^5y}\right)^{-4} = \left(\frac{x^3y^6}{x^5y}\right)^{-4}$ $= \left(\frac{x^5y^1}{x^3y^6}\right)^4$ $= (x^{5-3}y^{1-6})^4$ $= (x^2y^{-5})^4$ $= x^8y^{-20}$ $= \frac{x^8}{y^{20}}$

RÉVISION

4.1

1. Évalue chaque radical. Pourquoi peux-tu le faire sans utiliser de calculatrice ?

a) $\sqrt[3]{1\,000}$ **b)** $\sqrt{0{,}81}$

c) $\sqrt[6]{64}$ **d)** $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$

2. À l'aide d'exemples, explique la signification de l'indice d'un radical.

3. Estime la valeur de chaque radical au dixième près. Quelles stratégies peux-tu utiliser ?

a) $\sqrt{11}$ **b)** $\sqrt[3]{-12}$ **c)** $\sqrt[4]{15}$

4. Identifie le nombre dans chaque cas.

a) 5 est une racine carrée du nombre.
b) 6 est la racine cubique du nombre.
c) 7 est une racine quatrième du nombre.

5. La notation décimale de $\sqrt[3]{35}$ est-elle finie, périodique ou ni l'un ni l'autre ? Justifie ta réponse.

4.2

6. Indique si chaque nombre est rationnel ou irrationnel. Justifie tes réponses.

a) -2 **b)** 17 **c)** $\sqrt{16}$
d) $\sqrt{32}$ **e)** 0,756 **f)** $12{,}\overline{3}$
g) 0 **h)** $\sqrt[3]{81}$ **i)** π

7. Un carré a une aire de 23 cm^2. Détermine la longueur de côté approximative de ce carré. Comment peux-tu vérifier ta réponse ?

8. Examine cet écran de calculatrice.

π
3.141592654

a) Le nombre 3,141 592 654 est-il rationnel ou irrationnel ? Justifie ta réponse.
b) Le nombre π est-il rationnel ou irrationnel ? Justifie ta réponse.

9. Place chaque nombre sur une droite numérique. Écris ensuite les nombres par ordre croissant.

$\sqrt[3]{30}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt[4]{18}$, $\sqrt[3]{-30}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt[4]{10}$

10. La formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9{,}8}}$ définit le temps T, en secondes, que met un pendule de longueur L, en mètres, à effectuer une oscillation complète. Le pendule d'une horloge a une longueur de 0,25 m. Combien de temps le pendule prend-il pour effectuer une oscillation ? Indique ta réponse à la seconde près.

4.3

11. Écris chaque radical sous forme simplifiée.

a) $\sqrt{150}$ **b)** $\sqrt[3]{135}$ **c)** $\sqrt{112}$ **d)** $\sqrt[4]{162}$

12. Écris chaque radical sous forme entière.

a) $6\sqrt{5}$ **b)** $3\sqrt{14}$ **c)** $4\sqrt[3]{3}$ **d)** $2\sqrt[4]{2}$

13. Les cubes de luzerne fournissent des protéines, des minéraux et des vitamines aux chevaux.

Deux formats de cubes de luzerne ont respectivement un volume de 32 cm^3 et de 11 cm^3. Quelle est la différence entre les longueurs d'arête des cubes ? Comment peux-tu utiliser des radicaux pour la déterminer ?

14. Un élève a simplifié $\sqrt{300}$ ainsi :

$$\begin{aligned}\sqrt{300} &= \sqrt{3}\cdot\sqrt{100}\\ &= \sqrt{3}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}\\ &= \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}\\ &= 3\cdot 5\cdot\sqrt{2}\cdot 5\\ &= 75\sqrt{2}\end{aligned}$$

Trouve les erreurs de l'élève, puis écris une solution juste.

15. Place ces nombres par ordre décroissant sans utiliser de calculatrice. Décris ta stratégie.

$5\sqrt{2}, 4\sqrt{3}, 3\sqrt{6}, 2\sqrt{7}, 6\sqrt{2}$

4.4

16. À l'aide d'exemples, montre pourquoi $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ lorsque n est un nombre naturel strictement positif et que a est un nombre rationnel.

17. Exprime chaque puissance sous la forme d'un radical.

a) $12^{\frac{1}{4}}$ **b)** $(-50)^{\frac{5}{3}}$

c) $1{,}2^{0{,}5}$ **d)** $\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

18. Exprime chaque radical sous la forme d'une puissance.

a) $\sqrt{1{,}4}$ **b)** $\sqrt[3]{13^2}$

c) $\left(\sqrt[5]{2{,}5}\right)^4$ **d)** $\left(\sqrt[4]{\frac{2}{5}}\right)^3$

19. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $16^{0{,}25}$ **b)** $1{,}44^{\frac{1}{2}}$

c) $(-8)^{\frac{5}{3}}$ **d)** $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$

20. Les isotopes radioactifs se désintègrent. La demi-vie d'un isotope est le temps nécessaire pour que sa masse diminue de moitié. Par exemple, le polonium 210 a une demi-vie de 20 semaines. Ainsi, un échantillon de 100 g diminue de 50 g en 20 semaines. Le pourcentage, P, de polonium qu'il reste après t semaines est donné par la formule $P = 100(0{,}5)^{\frac{t}{20}}$. Quel pourcentage de polonium 210 reste-t-il après 30 semaines ?

21. Place ces nombres par ordre décroissant. Décris la stratégie que tu utilises.

$\sqrt[4]{5}, 5^{\frac{2}{3}}, \sqrt[3]{5}, 5^{\frac{3}{4}}, \left(\sqrt{5}\right)^3$

22. La loi de Kleiber relit le métabolisme de base des mammifères au repos, q, en calories par jour, à leur masse corporelle, M, en kilogrammes :

$q = 70M^{\frac{3}{4}}$

Quelle est la valeur approximative de q chez chaque animal ?

a) une vache d'une masse de 475 kg

b) une souris d'une masse de 25 g

4.5

23. a) Décris les régularités dans cette liste.

$81 = 3^4$ $27 = 3^3$ $9 = 3^2$

b) Prolonge les régularités en a) vers la doite. Écris les 5 éléments suivants de la liste.

c) Explique comment ces régularités montrent que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ lorsque a est un nombre rationnel non nul et que n est un nombre naturel strictement positif.

24. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) 2^{-2} **b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ **c)** $\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$

25. Kyle veut avoir 1 000 $ dans 3 ans. À l'aide de la formule $C = 1\,000(1{,}032\,5)^{-3}$, il calcule le montant d'argent qu'il doit placer aujourd'hui dans un compte d'épargne qui rapporte des intérêts de 3,25 % calculés annuellement. Quel montant d'argent Kyle doit-il placer aujourd'hui ?

26. Une entreprise conçoit un contenant ayant la forme d'un prisme à base triangulaire qui doit contenir 500 mL de jus. Les bases du prisme sont des triangles équilatéraux dont la longueur de côté mesure c centimètres. La hauteur du prisme, h, en centimètres, est donnée par la formule $h = 2\,000(3)^{-\frac{1}{2}}c^{-2}$.

Quelle est la hauteur d'un contenant dont la base a une longueur de côté de 8,0 cm ? Indique ta réponse au dixième de centimètre près.

27. Quand des musiciens jouent ensemble, ils accordent habituellement leurs instruments de façon que la note *la* qui se trouve au-dessus du do central ait une fréquence de 440 Hz, appelée le *diapason de concert*. On calcule la fréquence F, en hertz, d'une note située n demi-tons au-dessus du diapason à l'aide de la formule $F = 440(\sqrt[12]{2})^n$.

Le *do* central se trouve 9 demi-tons au-dessous du diapason de concert. Quelle est la fréquence du *do* central ? Indique ta réponse au hertz près.

4.6

28. Simplifie chaque expression. Explique ton raisonnement.

a) $(3m^4n)^2$ b) $\left(\dfrac{x^2y}{y^{-2}}\right)^{-2}$

c) $(16a^2b^6)^{-\frac{1}{2}}$ d) $\left(\dfrac{r^3s^{-1}}{s^{-2}r^{-2}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

29. Simplifie chaque expression. Montre ce que tu as fait.

a) $(a^3b)(a^{-1}b^4)$ b) $\left(x^{\frac{1}{2}}y\right)\left(x^{\frac{3}{2}}y^{-2}\right)$

c) $\dfrac{a^3}{a^5} \cdot a^{-3}$ d) $\dfrac{x^2y}{x^{\frac{1}{2}}y^{-2}}$

30. Évalue chaque expression.

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ b) $\dfrac{(-5,5)^{\frac{2}{3}}}{(-5,5)^{-\frac{4}{3}}}$

c) $\left[\left(-\dfrac{12}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^6$ d) $\dfrac{0,16^{\frac{3}{4}}}{0,16^{\frac{1}{4}}}$

31. Une sphère a un volume de 1 100 cm³. Explique comment tu peux estimer le rayon de la sphère à l'aide d'exposants ou de radicaux.

32. Trouve toute erreur dans chaque solution, puis écris une solution juste.

a) $$\begin{aligned}\left(s^{-1}t^{\frac{1}{3}}\right)(s^4t^3) &= s^{-1} \cdot s^4 \cdot t^{\frac{1}{3}} \cdot t^3 \\ &= s^{-4}t\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\left(\frac{4c^{\frac{1}{3}}}{d^3}\right)^{-3} &= \frac{-12c^{-1}}{d^0} \\ &= -12c^{-1} \\ &= \frac{1}{12c}\end{aligned}$$

L'UNIVERS DES MATHS

Un peu d'histoire : Le nombre d'or

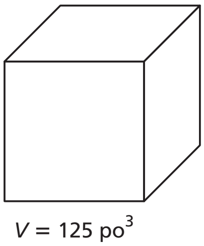
Le rapport $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: 1 s'appelle le *nombre d'or*. Les édifices et les œuvres d'art dont les dimensions respectent ce rapport sont souvent qualifiés d'agréables à regarder et de « naturels ». Le sculpteur grec Phidias utilisait le nombre d'or. Vers 435 avant notre ère, il a sculpté une statue du dieu grec Zeus pour le temple d'Olympie. D'une hauteur de 42 pi, cette statue est l'une des sept merveilles de l'Antiquité. Le nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est souvent appelé « phi », du nom de la première lettre grecque de « Phidias ».

TEST PRÉPARATOIRE

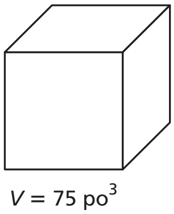
Pour les questions 1 et 2, choisis la meilleure réponse : A, B, C ou D.

1. Le volume V de chaque cube est indiqué en pouces cubes. Pour quel cube la longueur d'arête est-elle un nombre irrationnel ?

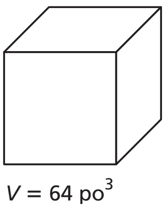
A.



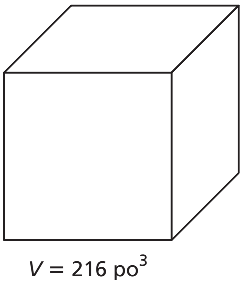
B.



C.



D.



2. Lequel de ces nombres est rationnel ?

A. $\sqrt{0{,}09}$ **B.** $\sqrt{50}$ **C.** $\sqrt[3]{-\frac{64}{121}}$ **D.** π

3. a) Quel nombre est le plus grand : $\sqrt{70}$ ou $5\sqrt{3}$? Justifie ta réponse.
b) Trace une droite numérique pour représenter les nombres en a).

4. Évalue chaque expression sans utiliser de calculatrice.

a) $\sqrt[4]{\frac{256}{81}}$ **b)** $(-4)^{-2}$ **c)** $0{,}81^{\frac{3}{2}}$ **d)** $16^{-\frac{1}{2}}$

5. Écris $44^{\frac{1}{2}}$ sous la forme d'un radical simplifié.

6. Une élève a simplifié $\frac{x^{-1}y^3}{xy^{-2}}$ ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{x^{-1}y^3}{xy^{-2}} &= x^{-1+1} \cdot y^{3-2}\\ &= x^0y^1\\ &= y\end{aligned}$$

A-t-elle raison ? Si tu réponds non, décris toute erreur et écris une solution juste.

7. Simplifie chaque expression. Utilise des exposants positifs.

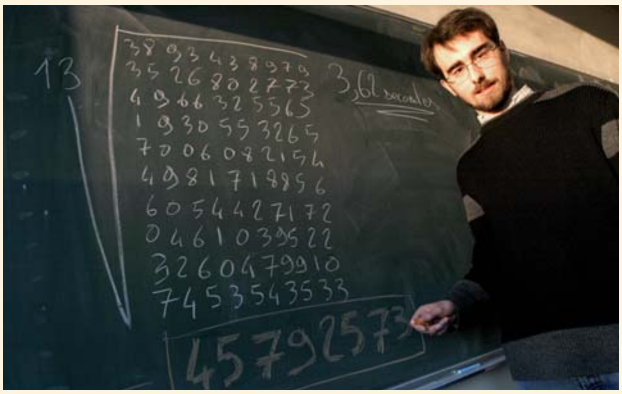
a) $(p^{-2}q^{-1})^2\left(p\,q^{\frac{1}{2}}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{c^6d^5}{c^3d^4}\right)^{-\frac{1}{3}}$

8. Les scientifiques calculent le volume d'eau qu'un mammifère boit en une journée à l'aide de la formule $d = 0{,}099m^{\frac{9}{10}}$, où d est le volume d'eau en litres et m est la masse de l'animal en kilogrammes. Calcule la quantité d'eau qu'un orignal de 550 kg boit en une journée.

Les calculatrices humaines

Dans l'histoire, il y a eu des femmes et des hommes si compétents en calcul mental qu'on les surnomme des « calculatrices humaines ». En 1980, Shakuntala Devi a multiplié mentalement les nombres 7 686 369 774 870 et 2 465 099 745 779 et donné la bonne réponse, 18 947 668 177 995 426 462 773 730, en 28 secondes.

En 2004, Alexis Lemaire a déterminé la racine treizième d'un nombre à 100 chiffres en moins de 4 secondes. En 2007, il a réussi à déterminer la racine treizième d'un nombre à 200 chiffres en un peu plus d'une minute.



PARTIE A : CALCULER MENTALEMENT

Pour déterminer des carrés et des racines carrées à l'aide du calcul mental, tu dois reconnaître des régularités numériques, avoir des notions d'algèbre élémentaire et comprendre les relations entre les nombres.

- Évalue 15^2, 25^2, 35^2, 45^2 et 55^2 à l'aide d'une calculatrice.
  Quelles régularités remarques-tu ?
  Comment peux-tu utiliser ces régularités pour déterminer le carré d'un nombre qui se termine par 5 ?
  Évalue 75^2 et 105^2 à l'aide des régularités.
- Tu peux élever un nombre à 2 chiffres au carré à partir des régularités qui permettent d'élever un binôme au carré :

$$\begin{aligned} 41^2 &= (40 + 1)^2 \\ &= 40^2 + 2(40)(1) + 1^2 \\ &= 1\,600 + 80 + 1 \\ &= 1\,681 \end{aligned}$$

  Adapte cette méthode pour déterminer 39^2 à l'aide du calcul mental.

- Tu peux déterminer mentalement les racines carrées de nombres à 4 chiffres, tels que $\sqrt{4\,489}$, à l'aide de ta compréhension des relations entre les nombres.
  Explique pourquoi $60 < \sqrt{4\,489} < 70$.
  Comment sais-tu que $\sqrt{4\,489}$ doit se terminer par un 3 ou un 7 ?
  Quelle est la valeur de $\sqrt{4\,489}$?
  Comment le chiffre des unités d'un radicande peut-il t'aider à établir si ce radicande peut être un nombre carré parfait et, dans ce cas, à identifier des racines possibles ?

PARTIE B : EXPLORER DES MÉTHODES DE CALCUL MENTAL

Invente tes propres méthodes ou effectue une recherche sur les méthodes de calcul mental qui permettent :

- d'élever au carré différents types de nombres à 2 chiffres ;
- d'obtenir la racine carrée de nombres carrés à 4 chiffres tels que 2 601.

LA PRÉSENTATION DU PROJET

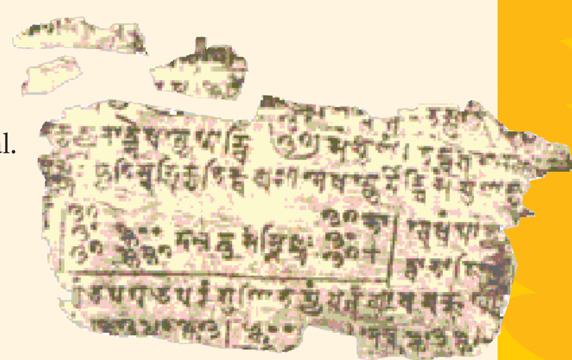
Tu peux présenter ton travail par écrit ou oralement, mais assure-toi d'inclure :

- une explication de tes méthodes et des exemples ;
- une explication de la raison pour laquelle chaque méthode fonctionne. Appuie ton explication sur l'algèbre, les régularités numériques, des schémas ou des modèles comme les carreaux algébriques. Tu devras peut-être faire une recherche pour trouver cette explication.

VA PLUS LOIN

La plupart des gens n'ont pas d'habiletés exceptionnelles en calcul mental. C'est pourquoi on a mis au point des méthodes relativement complexes pour calculer ou estimer des racines par écrit.

- Dans Internet ou d'anciens manuels de mathématiques, cherche des méthodes ou des formules qui ont servi à calculer ou à estimer des racines, en particulier des racines carrées et des racines cubiques. Il peut s'agir de formules associées à Newton, Héron et Bakhshali.
- Rédige un bref compte rendu et donne un exemple de l'utilisation d'une de ces méthodes. Essaie d'expliquer pourquoi la méthode fonctionne.



Le manuscrit de Bakhshali a été découvert au Pakistan en 1881. Les experts pensent qu'il s'agit d'une reproduction, faite au VIIe siècle, d'un manuscrit écrit au Ve siècle de notre ère environ.

RÉVISION CUMULATIVE Chapitres 1 à 4

1

1. Une pyramide droite a une base rectangulaire de 6 m sur 4 m et une hauteur de 9 m. Détermine l'aire totale de la pyramide, au mètre carré près.

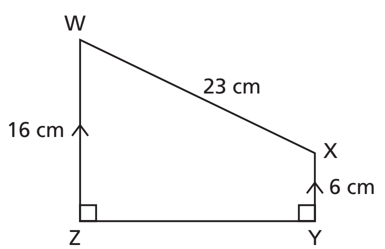
2. Un cône droit a un apothème de 12 po. Le diamètre de la base est de 9 po. Détermine le volume du cône, au pouce cube près.

3. Une sphère a une aire totale de 86 cm^2.
a) Calcule le diamètre de la sphère, au dixième de centimètre près.
b) Quel est le rayon de la sphère, au pouce près ?

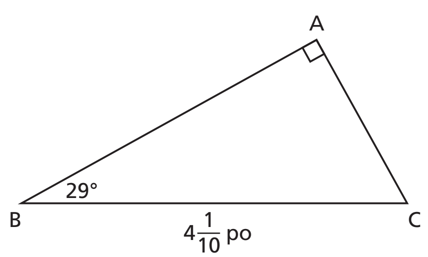
2

4. Un arbre projette une ombre d'une longueur de 15 vg quand les rayons solaires forment un angle de 32° avec le sol. Quelle est la hauteur de l'arbre, au pied près ?

5. Dans ce trapèze, détermine la mesure de $\angle$W au dixième de degré près.



6. a) Détermine le périmètre du $\triangle$ABC au dixième de pouce près.



b) Détermine l'aire du $\triangle$ABC au pouce carré près.

3

7. Détermine le plus grand facteur commun et le plus petit commun multiple de chaque ensemble de nombres.
a) 45, 117 **b)** 84, 154
c) 63, 90, 150 **d)** 42, 132, 140, 330

8. Un cube a un volume de 50 653 pouces cubes. Quelle est son aire totale ?

9. a) Dresse la liste des dix premiers carrés parfaits.
b) Dresse la liste des dix premiers cubes parfaits.
c) Parmi les cubes parfaits en b), lesquels sont aussi des carrés parfaits ?

10. Décompose chaque polynôme en facteurs.
a) $15a^2 - 27a$
b) $4p + 12p^3 - 6p^2$
c) $-8d^4 - 14d$
d) $21w - 28 + 14w^2$
e) $18x^4y^2 - 4x^3y^3 + 10x^2y^4$
f) $33n^4p^3 + 11n^2p^2 - 121np^4$

11. Quels trinômes peux-tu représenter par un rectangle de carreaux algébriques ? Qu'est-ce que cela t'indique sur les trinômes ?
a) $t^2 + 8t + 7$ **b)** $c^2 + 16c + 4$
c) $3s^2 + 4s + 6$ **d)** $2m^2 + 11m + 15$

12. Développe chaque produit et simplifie-le. Représente chaque produit à l'aide d'un schéma rectangulaire.
a) $(d + 5)(d - 3)$ **b)** $(5 - s)(9 - s)$
c) $(-7 + 4g)(7 + 4g)$ **d)** $(3k - 7)(2k + 9)$

13. Remplace chaque $\square$ par un nombre entier afin de rendre chaque trinôme décomposable en facteurs.
a) $x^2 + \square x + 14$ **b)** $b^2 - 5b + \square$
c) $y^2 + \square y - 18$ **d)** $a^2 + 4a + \square$

14. Décompose chaque trinôme en facteurs. Développe le produit pour vérifier les facteurs.
a) $n^2 + 9n - 22$ **b)** $60 - 19m + m^2$
c) $6r^2 + 23r + 20$ **d)** $10n^2 + n - 2$

15. Décompose chaque polynôme en facteurs.
a) $3c^2 - 24c - 60$
b) $-5h^2 - 20h + 105$
c) $24c^2 - 87c - 36$
d) $100 - 155a + 60a^2$
e) $4t^2 - 48t + 144$
f) $64 + 8w - 2w^2$
g) $108r^2 - 147s^2$
h) $-70x^2 + 22xy + 12y^2$

16. Développe chaque produit puis simplifie-le.
a) $(2x - 3)(x^2 + 3x - 5)$
b) $(a + 2b)(2a - 5b - 6)$
c) $(4 + t + 3s)(3 - t)$
d) $(n^2 + 2n - 1)(2n^2 - n - 4)$

17. Développe chaque expression et simplifie-la. Remplace la variable par un nombre pour vérifier chaque produit.
a) $(2c - 5)(c + 6) + (c + 6)(3c - 2)$
b) $(2t - 5)^2 - (2t + 5)(3t - 1)$
c) $(3w + 4)(2w + 7) - (5w + 3)(2w - 6)$
d) $(6d + 3)(2d - 3) - (3d - 4)^2$

18. Décompose chaque polynôme en facteurs. Effectue une multiplication pour vérifier les facteurs.
a) $25n^2 + 40n + 16$
b) $24v^2 + 14vw - 3w^2$
c) $81c^2 - 169d^2$
d) $9a^2 - 30ab + 25b^2$

4

19. À l'aide des deux cubes parfaits consécutifs les plus proches de 40, estime une valeur de $\sqrt[3]{40}$. Précise ton estimation jusqu'à ce que son cube se situe à deux décimales près de 40.

20. Place chaque nombre sur une droite numérique. Écris ensuite les nombres par ordre croissant.
$\sqrt[3]{90}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt[4]{150}$, $\sqrt[3]{-90}$, $\sqrt[4]{250}$

21. a) Écris chaque radical sous forme composée.
I) $\sqrt{96}$ II) $\sqrt[3]{108}$ III) $\sqrt[4]{144}$
IV) $\sqrt{425}$ V) $\sqrt[3]{648}$ VI) $\sqrt[4]{352}$

b) Écris chaque radical sous forme entière.
I) $5\sqrt{3}$ II) $2\sqrt[3]{5}$ III) $11\sqrt[4]{2}$
IV) $3\sqrt{7}$ V) $9\sqrt[3]{4}$ VI) $2\sqrt[5]{3}$

22. a) Écris chaque puissance sous la forme d'un radical.
I) $50^{\frac{3}{4}}$ II) $(-2,5)^{\frac{2}{3}}$ III) $\left(\frac{3}{4}\right)^{1,6}$

b) Écris chaque radical sous la forme d'une puissance.
I) $\sqrt[3]{8,9^2}$ II) $\left(\sqrt[4]{\frac{7}{4}}\right)^3$ III) $\sqrt[5]{(-4,8)^6}$

23. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.
a) $81^{0,75}$ b) $\left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{3}{2}}$ c) $(-0,027)^{\frac{5}{3}}$
d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}$ e) $16^{-\frac{3}{4}}$ f) $\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{3}{2}}$
g) $243^{0,6}$ h) $(-0,064)^{-\frac{2}{3}}$ i) $\left(\frac{49}{121}\right)^{-\frac{3}{2}}$

24. Une personne veut avoir un montant de 30 000 $ dans 7 ans. Un compte d'épargne rapporte des intérêts de 2,7 % calculés annuellement. Le capital C, en dollars, que la personne doit placer aujourd'hui est donné par la formule $C = 30\,000(1,027)^{-7}$. Quel montant d'argent la personne doit-elle placer aujourd'hui pour atteindre son but?

25. Évalue chaque expression.
a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1,5}\left(\frac{2}{5}\right)^{0,5}$ b) $\dfrac{0,25^{-\frac{2}{3}}}{0,25^{-\frac{5}{3}}}$
c) $\dfrac{\left(0,36^{\frac{5}{2}}\right)\left(0,36^{\frac{3}{2}}\right)}{0,36^{\frac{9}{2}}}$ d) $\dfrac{\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{7}{3}}\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}}\left(-\frac{1}{8}\right)}$

26. Simplifie chaque expression.
a) $\dfrac{(a^{-2}b^{-1})^{-3}}{a^3b}$ b) $\left(\dfrac{2x^{-4}y^{-3}}{4x^2y^{-5}}\right)^{-4}$
c) $\dfrac{-15a^{-\frac{1}{2}}b}{5ab^{-\frac{3}{2}}}$ d) $\left(\dfrac{x^6z^{-\frac{1}{3}}}{-125y^{-9}z^{\frac{8}{3}}}\right)^{-\frac{1}{3}}$