7 Les systèmes d'équations linéaires

HABILETÉS ACQUISES

- représenter des problèmes à l'aide de relations linéaires
- tracer le graphique de fonctions linéaires
- résoudre des équations linéaires

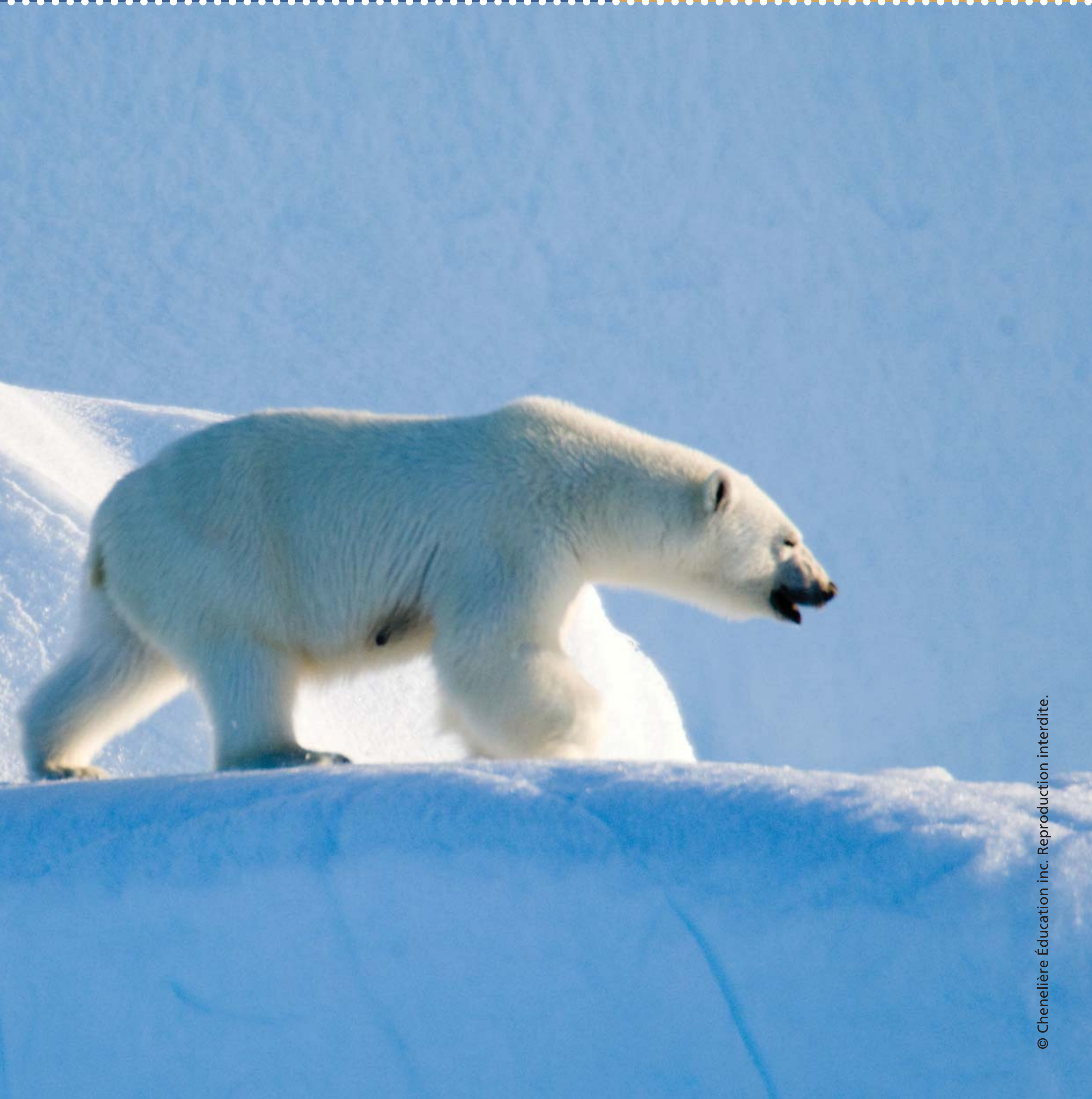
CONCEPTS CLÉS

- Résoudre un système de deux équations linéaires consiste à déterminer l'ensemble des paires ordonnées qui satisfont les deux équations.
- Si on multiplie ou divise les équations d'un système linéaire par un même nombre autre que zéro, qu'on les additionne ou qu'on les soustrait, on obtient un système équivalent.
- Un système de deux équations linéaires peut admettre une seule solution, admettre un nombre infini de solutions ou n'admettre aucune solution.

TERMINOLOGIE

un système d'équations linéaires,
un système linéaire
la méthode par substitution
des systèmes linéaires équivalents
la méthode par élimination
infini
des droites confondues

LES OURS POLAIRES *Les scientifiques ont recueilli des données sur le nombre et le comportement des ours polaires rencontrés au Nunavut. À partir de certaines de ces données, il est possible d'écrire puis de résoudre des problèmes à l'aide de systèmes linéaires.*



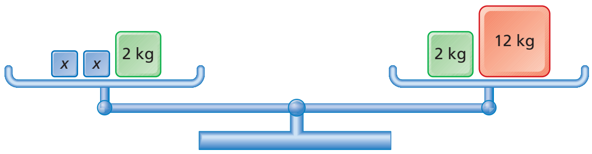
7.1 Établir des systèmes d'équations linéaires

OBJECTIF DE LA LEÇON

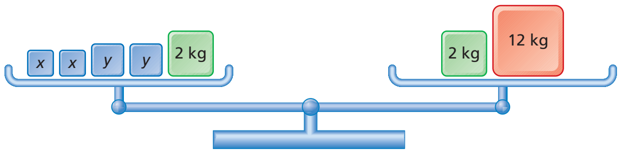
Représenter une situation à l'aide d'un système d'équations linéaires.

Établis des liens

Quelle équation linéaire définit la relation entre les masses sur cette balance ?



Quelle équation linéaire définit la relation entre les masses sur cette balance ?



Quelles sont les ressemblances entre les deux équations ?
Quelles sont les différences ?

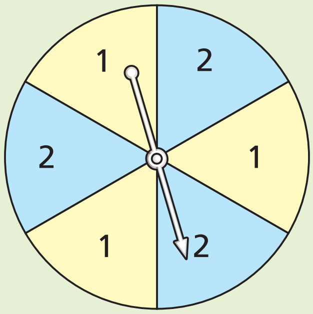
Que sais-tu au sujet du nombre de solutions de chaque équation ?

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille avec une ou un camarade.

Le nombre 1 ou 2 apparaît sur chaque secteur d'une roulette.



Dans un jeu, chaque personne fait tourner la flèche de la roulette 10 fois et note les nombres obtenus. La somme des 10 nombres représente son résultat. Une personne obtient 17 points. Combien de fois la flèche s'est-elle arrêtée sur 1 et sur 2 ? Écris deux équations qui représentent cette situation.

Pourquoi as-tu besoin de deux équations pour représenter cette situation ? Est-ce qu'une solution d'une équation est aussi une solution de l'autre équation ? Justifie ta réponse.

Les autobus d'un conseil scolaire peuvent transporter 12 ou 24 élèves. Ils peuvent transporter 780 élèves en tout. Il y a 20 petits autobus de plus que de grands autobus.

Une façon de déterminer le nombre d'autobus de chaque type consiste à écrire deux équations qui représentent la situation.
D'abord, définis les quantités inconnues.
Il y a un nombre inconnu de petits autobus.
Soit p, le nombre de petits autobus.

Il y a un nombre inconnu de grands autobus.
Soit g, le nombre de grands autobus.
Les autobus peuvent transporter 780 élèves en tout.
Chaque petit autobus peut transporter 12 élèves et chaque grand autobus peut transporter 24 élèves. Donc, le nombre total d'élèves correspond à $12p + 24g = 780$.
Il y a 20 petits autobus de plus que de grands autobus. Donc, la relation entre les nombres d'autobus correspond à $p = g + 20$.

Pourquoi peux-tu aussi écrire la première équation sous la forme $p + 2g = 65$? Pourquoi peut-il être préférable d'écrire cette équation sous la forme $12p + 24g = 780$?

Les deux équations linéaires suivantes représentent la situation :
$12p + 24g = 780$
$p = g + 20$

Ces deux équations forment un **système d'équations linéaires** à deux variables, p et g. Un système d'équations linéaires s'appelle aussi un **système linéaire.** Toute paire de valeurs de p et de g qui satisfait les deux équations du système linéaire est une *solution*.

Quelqu'un te dit qu'il y a 35 petits autobus et 15 grands autobus. Afin de vérifier s'il s'agit de la solution, compare ces données avec ce que tu connais de la situation. La différence entre le nombre de petits autobus et le nombre de grands autobus est $35 - 15 = 20$. Calcule le nombre total d'élèves à bord de 35 petits autobus et de 15 grands autobus.

$$\begin{aligned}\text{Nombre total d'élèves} &= 35(12) + 15(24)\\ &= 420 + 360\\ &= 780\end{aligned}$$

La différence entre le nombre de petits autobus et le nombre de grands autobus est de 20, et le nombre total d'élèves est de 780. La solution est exacte puisqu'elle concorde avec les données du problème.

Une autre façon de vérifier la solution consiste à substituer les valeurs de p et de g dans les équations.
Dans chaque équation, remplace p par 35 et g par 15.

$12p + 24g = 780$

$$\begin{aligned}\text{M. G.} &= 12p + 24g\\ &= 12(35) + 24(15)\\ &= 420 + 360\\ &= 780\\ &= \text{M. D.}\end{aligned}$$

$p = g + 20$

$$\begin{aligned}\text{M. G.} &= p\\ &= 35\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{M. D.} &= g + 20\\ &= 15 + 20\\ &= 35\\ &= \text{M. G.}\end{aligned}$$

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite. Puisqu'elles satisfont les deux équations, les valeurs $p = 35$ et $g = 15$ représentent la solution du système linéaire.

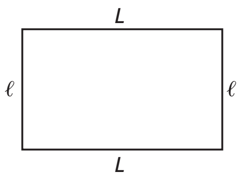
Exemple 1 Représenter une situation à l'aide d'un schéma

a) Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire : Le périmètre d'un drapeau du Nunavut est de 16 pi. Sa longueur a 2 pi de plus que sa largeur.

b) Denise a déterminé que le drapeau mesure 5 pi de longueur et 3 pi de largeur.
Vérifie sa solution à l'aide de ton système linéaire en a).

SOLUTION

a) Dessine un rectangle qui représente le drapeau.
Soit L et ℓ, les dimensions du drapeau, en pieds.



Le périmètre du drapeau mesure 16 pi.
Le périmètre est égal à $L + L + \ell + \ell = 2L + 2\ell$.
Donc, le périmètre correspond à $2L + 2\ell = 16$.
La longueur du drapeau a 2 pi de plus que sa largeur.
Donc, la relation entre les dimensions correspond à $L = \ell + 2$.

Voici un système linéaire qui représente la situation :
$2L + 2\ell = 16$
$L = \ell + 2$

b) Le drapeau mesure 5 pi de longueur et 3 pi de largeur.
Vérifions cette solution :
Les mesures ci-dessus confirment que la longueur a 2 pi de plus que la largeur.
Calcule le périmètre.

$$\begin{aligned} \text{Périmètre} &= \text{deux fois la longueur} + \text{deux fois la largeur} \\ &= 2(5\text{ pi}) + 2(3\text{ pi}) \\ &= 10\text{ pi} + 6\text{ pi} \\ &= 16\text{ pi} \end{aligned}$$

Cela montre que le périmètre est de 16 pi.
Alors, la solution est juste.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. a) Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire : La scène du centre culturel Lyle Victor Albert, à Bonnyville, en Alberta, est rectangulaire. Son périmètre est de 158 pi. La largeur de la scène a 31 pi de moins que sa longueur.

b) Sebi a déterminé que la scène mesure 55 pi de longueur et 24 pi de largeur. Vérifie sa solution à l'aide de ton système linéaire en a).

[Réponse : a) $2L + 2\ell = 158$; $\ell = L - 31$]

Comment peux-tu utiliser la stratégie « prédis et vérifie » pour résoudre le problème ?

Exemple 2 Établir un système linéaire à partir d'un tableau afin de représenter une situation

a) Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire : À Calgary, une école a amassé 195 \$ en recueillant 3 000 bouteilles et canettes à recycler. L'école a reçu 5 ¢ par canette et 20 ¢ par grosse bouteille en plastique.

b) L'école a recueilli 2 700 canettes et 300 grosses bouteilles. Vérifie ces nombres à l'aide de ton système linéaire.

SOLUTION

a) Choisis une variable pour représenter chaque nombre inconnu. Soit c, le nombre de canettes et b, le nombre de bouteilles. Remplis un tableau à l'aide des renseignements fournis.

	Consigne par unité (\$)	Nombre d'unités	Montant d'argent amassé (\$)
Canette	0,05	c	$0{,}05c$
Bouteille	0,20	b	$0{,}20b$
Total		3 000	195

La troisième colonne du tableau montre que le nombre total de canettes et de bouteilles recueillies peut être représenté par l'équation $c + b = 3\,000$. La quatrième colonne montre que le montant d'argent amassé peut être représenté par l'équation $0{,}05c + 0{,}20b = 195$. Voici donc un système linéaire qui représente la situation :

$c + b = 3\,000$
$0{,}05c + 0{,}20b = 195$

b) Vérifie la solution :
Dans chaque équation, remplace c par 2 700 et b par 300.

$$\begin{aligned} &c + b = 3\,000 \\ \text{M. G.} &= c + b \\ &= 2\,700 + 300 \\ &= 3\,000 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0{,}05c + 0{,}20b = 195 \\ \text{M. G.} &= 0{,}05c + 0{,}20b \\ &= 0{,}05(2\,700) + 0{,}20(300) \\ &= 135 + 60 \\ &= 195 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite. Puisqu'elles satisfont les deux équations, les valeurs $c = 2\,700$ et $b = 300$ sont la solution du système linéaire.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. **a)** Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire : Une école a amassé 140 \$ en recueillant 2 000 canettes et bouteilles en verre à recycler. L'école a reçu 5 ¢ par canette et 10 ¢ par bouteille.

b) L'école a recueilli 1 200 canettes et 800 bouteilles. Vérifie ces nombres à l'aide de ton système linéaire.

[Réponse : a) $0{,}05c + 0{,}10b = 140$; $c + b = 2\,000$]

Quel autre système linéaire peut représenter la situation ? La solution sera-t-elle différente ? Justifie ta réponse.

Carole examine la situation suivante :

L'étalage d'un magasin contient des paquets de 8 piles et des paquets de 4 piles.
Le nombre total de piles est de 320.
Il y a 1,5 fois plus de paquets de 4 piles que de paquets de 8 piles.

Carole a écrit le système linéaire suivant :
$8h + 4q = 320$
$1{,}5q = h$
où h représente le nombre de paquets de 8 piles et q représente le nombre de paquets de 4 piles.

Selon David, un camarade de classe de Carole, il y a 30 paquets de 8 piles et 20 paquets de 4 piles.

Pour vérifier cette solution, Carole remplace h par 30 et q par 20 dans chaque équation.

$8h + 4q = 320$	$1{,}5q = h$	
$\text{M. G.} = 8h + 4q$	$\text{M. G.} = 1{,}5q$	$\text{M. D.} = h$
$= 8(30) + 4(20)$	$= 1{,}5(20)$	$= 30$
$= 240 + 80$	$= 30$	$= \text{M. G.}$
$= 320$		
$= \text{M. D.}$		

Carole affirme que la solution est exacte puisque le membre de gauche est égal au membre de droite dans chaque équation.

Mais lorsque David utilise les données du problème pour vérifier sa solution, il s'aperçoit qu'il devrait y avoir plus de paquets de 4 piles que de paquets de 8 piles ; donc, la solution est inexacte.

Cela montre qu'il est préférable de vérifier une solution à partir des données du problème plutôt que de substituer les valeurs obtenues dans les équations. En effet, une erreur peut s'être glissée dans les équations.

Quelles sont les équations qui représentent correctement cette situation ?

Exemple 3 Établir le lien entre un système linéaire et un problème

Un magasin vend des roues pour patins à roulettes en paquets de 4 et des roues pour patins à roues alignées en paquets de 8.

Imagine une situation au sujet de ces roues qui peut être représentée par le système linéaire qui suit. Définis chaque variable. Écris un problème connexe.
$8a + 4r = 440$
$a + r = 80$

SOLUTION

$8a + 4r = 440$ ①
$a + r = 80$ ②

Numérote les équations d'un système linéaire pour être en mesure d'y référer facilement.

Dans l'équation ① :
La variable a est multipliée par 8, c'est-à-dire le nombre de roues dans un paquet pour patins à roues alignées.
Donc, a représente le nombre de paquets de roues pour patins à roues alignées dans le magasin.
La variable r est multipliée par 4, c'est-à-dire le nombre de roues dans un paquet pour patins à roulettes.
Donc, r représente le nombre de paquets de roues pour patins à roulettes dans le magasin.

Ainsi, l'équation ① représente le nombre total de roues dans tous les paquets du magasin.
De plus, l'équation ② représente le nombre total de paquets de roues des deux types dans le magasin.

Voici un problème possible :
Un magasin a 80 paquets de roues pour patins à roues alignées et pour patins à roulettes.
Les roues pour patins à roues alignées se vendent en paquets de 8.
Les roues pour patins à roulettes se vendent en paquets de 4.
Le nombre total de roues contenues dans tous les paquets est de 440.
Combien de paquets de roues pour patins à roues alignées et combien de paquets de roues pour patins à roulettes y a-t-il dans le magasin ?

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Une bicyclette a 2 roues et un tricycle a 3 roues.

Imagine une situation au sujet de ces roues qui peut être représentée par le système linéaire qui suit. Définis chaque variable. Écris un problème connexe.
$2b + 3t = 100$
$b + t = 40$

[Exemple de réponse :
Voici un problème possible : Il y a 40 bicyclettes et tricycles dans un magasin à rayons. En tout, il y a 100 roues de bicyclettes et de tricycles dans le magasin. Combien de bicyclettes et combien de tricycles y a-t-il dans le magasin ?]

Place à la discussion

1. Lorsque tu représentes une situation à l'aide d'un système linéaire, comment sais-tu quels éléments de la situation peuvent être représentés par des variables ?

2. Qu'est-ce que la *solution* d'un système linéaire ?

3. Comment peux-tu vérifier la solution d'un système linéaire ?

Exercices

A

4. Quel système d'équations *n'est pas* un système linéaire ?

a) $2x + y = 11$
$x = 13 + y$

b) $2x = 11 - y$
$4x - y = 13$

c) $-\frac{1}{2}x - y = \frac{3}{4}$
$\frac{3}{2}x + 2 = -\frac{7}{8}$

d) $-x^2 + y = 10$
$x + y = 5$

5. Quel système linéaire a la solution $x = -1$ et $y = 2$?

a) $3x + 2y = -1$
$2x - y = 1$

b) $3x - y = -1$
$-x - y = -1$

c) $-3x + 5y = 13$
$4x - 3y = -10$

B

6. Associe chaque situation à un des systèmes linéaires indiqués. Justifie tes choix. Explique ce que chaque variable représente.

a) Lors d'un solde de vêtements, 2 manteaux et 2 chandails coûtent en tout 228 $. Un manteau coûte 44 $ de plus qu'un chandail.

b) Le périmètre d'un terrain de tennis double réglementaire est de 228 pi. La largeur a 42 pi de moins que la longueur.

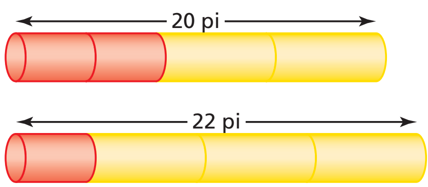
c) Dans une foire culturelle, un kiosque indien vend des chapatis et des pains naans 2 $ chacun. Il amasse 228 $. Le kiosque vend 40 chapatis de plus que de pains naans.

I) $2x + 2y = 228$
$x - y = 42$

II) $2x + 2y = 228$
$x - y = 40$

III) $2x + 2y = 228$
$x - y = 44$

7. a) Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire :
Des tuyaux de deux longueurs différentes sont assemblés comme dans l'illustration.



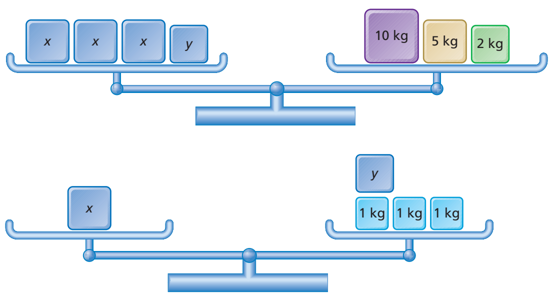
b) Vérifie que les tuyaux courts mesurent 4 pi et que les tuyaux longs mesurent 6 pi.

8. a) Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire : Le périmètre d'un triangle isocèle est de 24 cm. Chacun des côtés congrus mesure 6 cm de plus que le côté court.

b) Vérifie que les côtés ont 10 cm, 10 cm et 4 cm de longueur respectivement.

9. Thierry travaille dans une coopérative qui vend de grands et de petits sacs de riz sauvage récolté en Saskatchewan.

a) Les balances suivantes montrent les deux formats de sacs de riz : x représente la masse d'un grand sac et y représente la masse d'un petit sac. Représente les deux balances à l'aide d'un système linéaire.

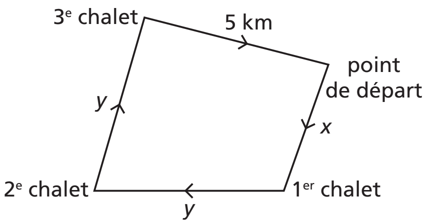


b) À l'aide des schémas des balances, vérifie que la masse d'un petit sac de riz est de 2 kg et que la masse d'un grand sac est de 5 kg.

c) Vérifie les masses des sacs à la partie b) à l'aide du système linéaire.

Pour les questions 10 et 11, représente la situation à l'aide d'un système linéaire. Détermine ensuite la solution exacte parmi les deux solutions proposées pour le problème connexe.

10. Une équipe de traîneau à chiens parcourt 25 km, pour revenir au même endroit en passant par trois chalets. Toutes les distances sont mesurées sur la piste. La distance du point de départ au 2e chalet est de 13 km. Quelle est la distance du point de départ au 1er chalet, et du 1er chalet au 2e chalet?
(*Solution A :* La distance du point de départ au 1er chalet est de 7 km. La distance du 1er chalet au 2e chalet est de 6 km. *Solution B :* La distance du point de départ au 1er chalet est de 6 km. La distance du 1er chalet au 2e chalet est de 7 km.)



11. Padma a marché et couru pendant 1 h sur un tapis roulant. La marche a duré 10 min de plus que la course. Pendant combien de temps Padma a-t-elle marché? Pendant combien de temps a-t-elle couru? (*Solution A :* Padma a marché pendant 35 min et a couru pendant 25 min. *Solution B :* Padma a couru pendant 35 min et a marché pendant 25 min.)

12. Sylvain a représenté une situation comportant une collection de pièces de 2 $ et de 1 $ à l'aide de ce système linéaire.
$2d + v = 160$
$d + v = 110$
a) Quel problème Sylvain peut-il avoir résolu?
b) Que représente chaque variable?

13. Jacqueline a écrit un problème sur le prix d'entrée pour adultes et pour enfants à une foire . Elle a représenté la situation à l'aide du système linéaire suivant:
$5a + 2e = 38$
$a - e = 2$
a) Quel problème Jacqueline peut-elle avoir écrit? Justifie ta réponse.
b) Que représente chaque variable?

14. Imagine une situation qui peut être représentée par le système linéaire qui suit. Explique ce que chaque variable représente, puis écris un problème connexe.
$x + y = 100$
$x - y = 10$

C

15. Tout système linéaire à deux variables peut être exprimé sous la forme:
$Ax + By = C$
$Dx + Ey = F$
a) Que sais-tu au sujet des coefficients B, E, C et F lorsque la solution du système est la paire ordonnée $(0, y)$?
b) Que sais-tu au sujet des coefficients A, D, C et F lorsque la solution du système est la paire ordonnée $(x, 0)$?

16. Montre comment tu peux écrire ce système sous la forme d'un système linéaire.
$$\frac{-3x + 24}{x + y} = -6$$
$$-\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = x + y$$

17. a) Écris un système linéaire dont la solution est $x = 1$ et $y = 1$. Explique ta démarche.
b) Pourquoi y a-t-il plus d'un système linéaire qui a la même solution?

18. a) Sans le vérifier, comment sais-tu que $y = 2$ fait partie de la solution de ce système linéaire?
$x + 2y = 7$
$x + 3y = 9$
b) Détermine la valeur de x. Explique ta démarche.

Réfléchis

De quoi dois-tu tenir compte pour représenter une situation à l'aide d'un système linéaire? Illustre ton explication à l'aide de l'un des exercices.

7.2 Résoudre graphiquement un système d'équations linéaires

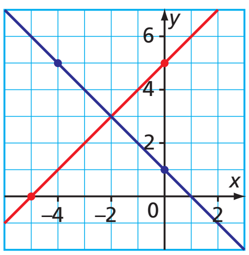
OBJECTIF DE LA LEÇON

Estimer la solution d'un système linéaire à l'aide des graphiques de ses équations.

Kelvington, en Saskatchewan, a affiché 6 cartes de hockey géantes près d'une autoroute pour rendre hommage aux joueurs de hockey célèbres de la ville, dont Wendel Clark.

Établis des liens

Les deux équations d'un système linéaire sont représentées graphiquement dans le même plan cartésien.



Quelle est l'équation de chaque droite ? Explique ton raisonnement.
Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des deux droites ?
Pourquoi ces coordonnées correspondent-elles à la solution du système linéaire ?

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.
Tu as besoin de papier quadrillé et d'une règle.

Voici un problème au sujet des cartes de hockey de Kelvington.

> Le périmètre de chaque carte de hockey géante est de 24 pi.
> La différence entre la hauteur et la largeur est de 4 pi.
> Quelles sont les dimensions de chaque carte ?

A. Représente cette situation à l'aide d'un système linéaire.

B. Trace le graphique de chaque équation dans le même plan cartésien.

C. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection P des deux droites ?

D. Pourquoi les coordonnées du point P correspondent-elles à une solution de chaque équation du système linéaire ?

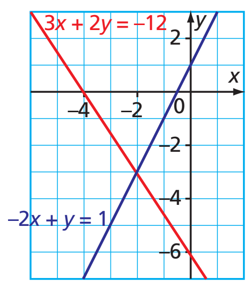
E. Quelles sont la hauteur et la largeur de chaque carte de hockey géante de Kelvington ?

Comment détermines-tu l'axe sur lequel tu dois inscrire chaque variable ?

Il est possible de représenter graphiquement les deux équations d'un système linéaire dans le même plan cartésien afin d'en estimer la solution. Si les deux droites se coupent, alors les coordonnées (x, y) du point d'intersection représentent la solution du système linéaire.

Chaque équation de ce système linéaire est représentée graphiquement dans le plan cartésien.

$3x + 2y = -12$ ①
$-2x + y = 1$ ②



Comment peux-tu vérifier que les droites représentent les équations du système linéaire ?

Tu peux estimer la solution du système linéaire à partir du graphique. Tous les points qui satisfont l'équation ① appartiennent à la droite qui la représente. Tous les points qui satisfont l'équation ② appartiennent à la droite qui la représente. Les points qui satisfont les deux équations correspondent aux endroits où les droites se coupent. D'après le graphique, les coordonnées du point d'intersection des droites semblent être $(-2, -3)$. Pour vérifier la solution, détermine si la paire ordonnée $(-2, -3)$ satisfait les deux équations.

Remplace x par -2 et y par -3 dans chaque équation :

$3x + 2y = -12$	$-2x + y = 1$
M. G. $= 3x + 2y$	M. G. $= -2x + y$
$= 3(-2) + 2(-3)$	$= -2(-2) - 3$
$= -6 - 6$	$= 4 - 3$
$= -12$	$= 1$
= M. D.	= M. D.

Pourquoi la solution doit-elle satisfaire les deux équations ?

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite. Puisqu'elles satisfont chaque équation, les valeurs $x = -2$ et $y = -3$ sont la solution du système linéaire.

Exemple 1 Résoudre graphiquement un système linéaire

Résous le système linéaire suivant :

$x + y = 8$

$3x - 2y = 14$

SOLUTION

$x + y = 8$ ①

$3x - 2y = 14$ ②

Détermine l'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine du graphique de l'équation ①.

L'abscisse à l'origine est 8 et l'ordonnée à l'origine est 8.

Écris l'équation ② sous la forme explicite.

$3x - 2y = 14$

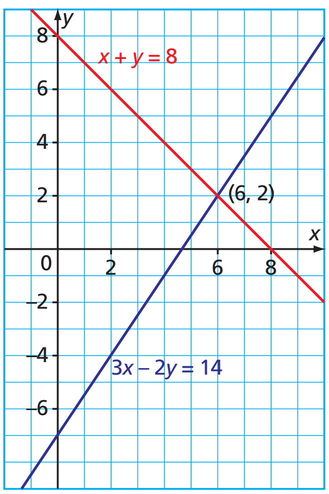
$-2y = -3x + 14$ Divise chaque membre par -2.

$y = \frac{3}{2}x - 7$

La pente de l'équation ② est de $\frac{3}{2}$ et son ordonnée à l'origine est -7.

Trace chaque droite.

Le point d'intersection semble être en (6, 2).



Vérifie la solution. Remplace x par 6 et y par 2 dans chaque équation.

$x + y = 8$	$3x - 2y = 14$
M. G. $= x + y$	M. G. $= 3x - 2y$
$= 6 + 2$	$= 3(6) - 2(2)$
$= 8$	$= 18 - 4$
= M. D.	$= 14$
	= M. D.

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite. Les valeurs $x = 6$ et $y = 2$ sont donc la solution du système linéaire.

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Résous le système linéaire suivant :

$2x + 3y = 3$

$x - y = 4$

[Réponse : (3, −1)]

Quelle autre stratégie pourrais-tu utiliser pour tracer le graphique des équations ?

Exemple 2 Résoudre un problème à l'aide du graphique d'un système linéaire

Un avion quitte Regina à midi et se dirige vers Ottawa, à une vitesse moyenne de 400 mi/h. La distance à parcourir est de 1 400 mi. Un autre avion quitte Ottawa à la même heure et se dirige vers Regina à une vitesse moyenne de 350 mi/h. Voici un système linéaire qui représente cette situation :

$d = 1\ 400 - 400t$

$d = 350t$

où d est la distance, en milles, par rapport à Ottawa, et t est le temps écoulé, en heures, depuis le décollage.

a) Représente graphiquement ce système linéaire.

b) Résous ce problème à l'aide du graphique : À quel moment les avions se croisent-ils et à quelle distance se trouvent-ils alors d'Ottawa ?

SOLUTION

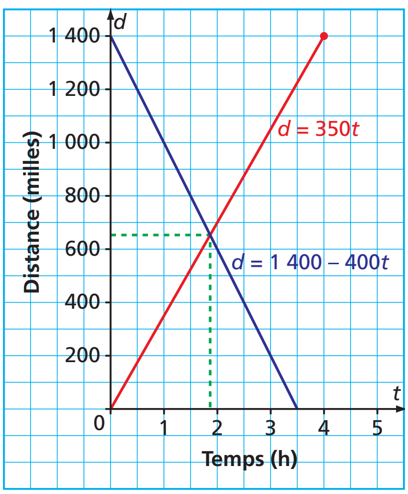
Les avions se croisent lorsqu'ils ont volé pendant le même nombre d'heures et qu'ils se trouvent à la même distance d'Ottawa.

a) Résous le système linéaire pour déterminer les valeurs de d et de t qui satisfont les deux équations.

$d = 1\ 400 - 400t$ ①

$d = 350t$ ②

Chaque équation est sous la forme explicite.
La pente et l'ordonnée à l'origine du graphique de l'équation ① sont -400 et 1 400 respectivement.
La pente et l'ordonnée à l'origine du graphique de l'équation ② sont 350 et 0 respectivement.
Représente graphiquement chaque équation.



(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Jane quitte son chalet du lac Waskesiu, en Saskatchewan, et se rend en kayak jusqu'au chalet de son ami Thomas à une vitesse moyenne de 4 km/h. Thomas quitte son chalet à la même heure et se dirige en kayak vers le chalet de Jane à une vitesse moyenne de 2,4 km/h. Une distance de 6 km sépare les chalets. Voici un système linéaire qui représente cette situation :

$d = 6 - 4t$

$d = 2{,}4t$

où d est la distance, en kilomètres, par rapport au chalet de Thomas, et t est le temps écoulé, en heures, depuis le départ de chaque personne.

a) Représente graphiquement ce système linéaire.

b) Résous ce problème à l'aide du graphique : Quand Jane et Thomas se croisent-ils et à quelle distance se trouvent-ils alors du chalet de Thomas ?

[Réponse : b) Après environ 54 min, à une distance d'environ 2,3 km du chalet de Thomas]

Que devrais-tu changer aux équations du système linéaire si tu voulais déterminer à quelle distance de Regina les avions se croisent et à quel moment ? Explique ta réponse.

b) Les droites semblent se couper en (1,9 ; 650). Cela signifie que les avions se croisent après 1,9 h de vol, à 650 mi d'Ottawa.
Vérifie la solution à partir des données du problème.
L'avion qui se rend à Ottawa vole à une vitesse de 400 mi/h.
Donc, en 1,9 h, il parcourt 400(1,9) mi = 760 mi.
Il se trouve ainsi à (1 400 − 760) mi, ou 640 mi, d'Ottawa.
L'avion qui se rend à Regina vole à de 350 mi/h.
Donc, en 1,9 h, il parcourt 350(1,9) mi = 665 mi.
Le temps et la distance sont approximatifs, puisqu'il n'est pas possible de lire les mesures avec précision dans le graphique.
0,9 h, c'est 60(0,9) min = 54 min. Les avions se croisent environ 1 h et 54 min après le décollage, lorsqu'ils se trouvent alors à environ 650 mi d'Ottawa.

Comment pourrais-tu résoudre le problème sans utiliser de système linéaire ?

Exemple 3 Résoudre un problème en établissant un système linéaire et en le représentant graphiquement

a) Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire : L'entrée au centre d'interprétation du précipice à bisons Head-Smashed-In, près de Fort Macleod, en Alberta, coûte 5 $ pour les élèves et 9 $ pour les adultes. En une heure, 32 personnes se présentent au centre d'interprétation, qui récolte ainsi 180 $ en droits d'entrée.

b) Représente graphiquement le système linéaire, puis résous le problème suivant : Combien d'élèves et combien d'adultes ont payé le droit d'entrée pendant cette heure ?

SOLUTION

a) Établis les équations à l'aide d'un tableau.

Données fournies	Établir un système linéaire
Il y a des élèves et des adultes.	Soit e, le nombre d'élèves. Soit a, le nombre d'adultes.
Il y a 32 personnes.	Équation : $e + a = 32$
L'entrée coûte 5 $ par élève.	Le total des droits d'entrée versés par les élèves est $5e$ dollars.
L'entrée coûte 9 $ par adulte.	Le total des droits d'entrée versés par les adultes est de $9a$ dollars.
Les droits d'entrée rapportent 180 $.	Autre équation : $5e + 9a = 180$

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. a) Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire : William a reçu ou envoyé 60 messages textes à l'aide de son cellulaire en une fin de semaine. Il a envoyé 10 messages de plus qu'il en a reçu.

b) Représente graphiquement le système linéaire, puis résous le problème suivant : Combien de messages textes William a-t-il envoyés et combien en a-t-il reçu ?

[Réponses : a) $e + r = 60$, $e - r = 10$; b) 35 messages envoyés et 25 messages reçus]

Le système linéaire est :

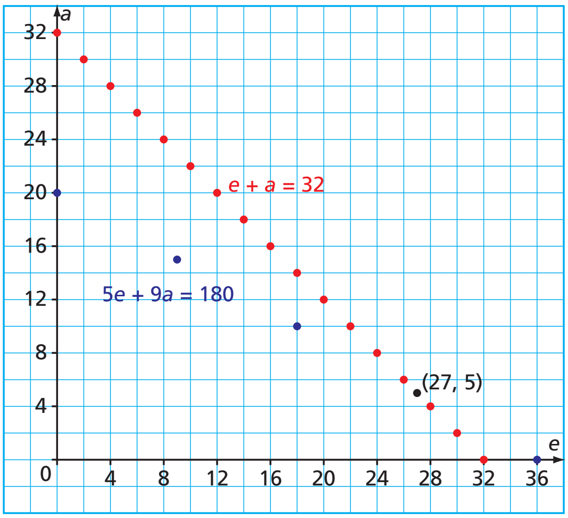
$e + a = 32$ ①

$5e + 9a = 180$ ②

b) Trace chaque droite à partir de ses coordonnées à l'origine.

Équation	Ordonnée à l'origine	Abscisse à l'origine
$e + a = 32$	32	32
$5e + 9a = 180$	20	36

Puisque les données sont discrètes, aligne une règle sur les coordonnées à l'origine et trace d'autres points pour chaque droite.



Le point d'intersection semble être en (27, 5).
Vérifie cette solution.
Détermine le coût pour 27 élèves à 5 $ chacun et 5 adultes à 9 $ chacun :

27 élèves à 5 $ chacun	= 135 $
+ 5 adultes à 9 $ chacun	= 45 $
32 personnes	= 180 $

Il y a 32 personnes en tout et les droits d'entrée s'élèvent à 180 $; la solution est donc juste.

Il y a 27 élèves et 5 adultes qui ont visité le centre d'interprétation.

Suppose que tu inscris les droits d'entrée des élèves (*e*) sur l'axe vertical et les droits d'entrée des adultes (*a*) sur l'axe horizontal. Obtiens-tu un graphique différent ? Obtiens-tu une solution différente ? Justifie ta réponse.

Place à la discussion

1. Quelles étapes suis-tu pour résoudre graphiquement un système d'équations linéaires ?

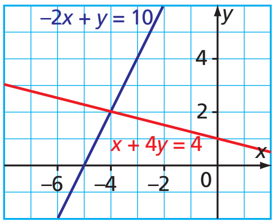
2. Quelles sont les limites de la résolution graphique d'un système linéaire ?

Exercices

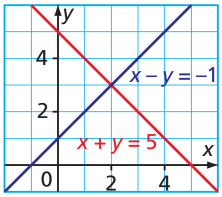
A

3. Détermine la solution de chaque système linéaire.

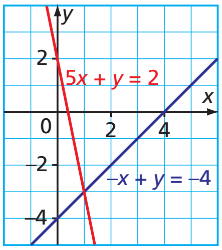
a)



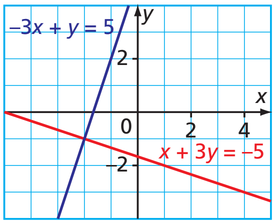
b)



c)



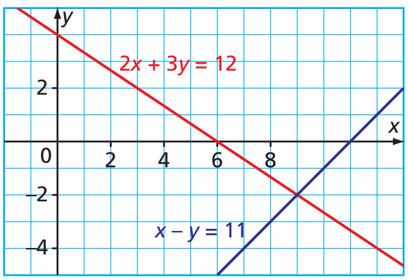
d)



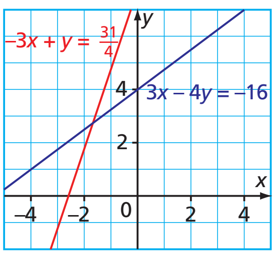
B

4. Pour chaque système linéaire, détermine la solution à l'aide du graphique. Explique comment tu sais si la solution est exacte ou approximative.

a)



b)



5. a) Résous chaque système linéaire.

I) $x + y = 7$
$3x + 4y = 24$

II) $x - y = -1$
$3x + 2y = 12$

III) $5x + 4y = 10$
$5x + 6y = 0$

IV) $x + 2y = -1$
$2x + y = -5$

b) Choisis un système linéaire en a). Explique la signification du point d'intersection du système.

6. Émile résout ce système linéaire et obtient (500, 300). Sa solution est-elle exacte ou approximative ? Justifie ta réponse.

$3x - y = 1\ 149$
$-x + 2y = 142$

7. Résous chaque système linéaire.

a) $2x + 4y = -1$
$3x - y = 9$

b) $5x + 5y = 17$
$x - y = -1$

c) $x + y = \frac{23}{4}$
$x - y = \frac{3}{4}$

d) $3x + y = 6$
$x + y = -\frac{4}{3}$

8. Voici le coût d'impression d'une brochure : L'entreprise A demande 175 $ plus 0,10 $ par brochure. L'entreprise B demande 250 $ plus 0,07 $ par brochure. Voici un système linéaire qui représente la situation :

$C = 175 + 0{,}10n$
$C = 250 + 0{,}07n$

où C représente le coût total, en dollars, et n représente le nombre de brochures imprimées.

a) Représente graphiquement le système linéaire.

b) Résous ces problèmes à l'aide du graphique.

I) Combien de brochures faut-il imprimer pour que le coût soit le même aux deux endroits ?

II) Quand est-il plus rentable de faire appel à l'entreprise A ? Justifie ta réponse.

9. Un magasin d'ordinateurs offre deux options de salaire à ses vendeurs à temps partiel. Option A : 700 $ par mois, plus une commission de 3 % sur les ventes totales. Option B : 1 000 $ par mois, plus une commission de 2 % sur les ventes totales. Voici un système linéaire qui représente la situation :

$S = 700 + 0{,}03v$
$S = 1\ 000 + 0{,}02v$

où S représente le salaire mensuel, en dollars, et v, les ventes mensuelles totales, en dollars.

a) Représente graphiquement le système linéaire.

b) Résous ces problèmes à l'aide du graphique.

I) Quel doit être le montant des ventes totales pour que les deux options rapportent le même salaire ?

II) Quand est-il préférable de choisir l'option B ? Justifie ta réponse.

Pour les questions 10 à 13, représente la situation à l'aide d'un système linéaire. Résous le problème connexe. Indique si ta solution est exacte ou approximative.

10. L'aire du parc Stanley, à Vancouver, est de 391 hectares. La partie boisée mesure 141 hectares de plus que le reste du parc. Quelle est l'aire de chaque partie du parc ?

11. Dans la Ligue américaine de hockey, une équipe obtient 2 points pour une victoire et 1 point pour une défaite en prolongation. Pendant la saison régulière de 2008-2009, le Moose du Manitoba a obtenu 107 points. L'équipe a eu 43 victoires de plus que de défaites en prolongation. Combien de victoires et combien de défaites en prolongation l'équipe a-t-elle eues ?

12. La classe d'Annika a amassé 800 $ en vendant des cartes-cadeaux de cinéma de 5 $ et de 10 $. Elle a vendu 115 cartes-cadeaux en tout. Combien de cartes-cadeaux de chaque type la classe a-t-elle vendues ?

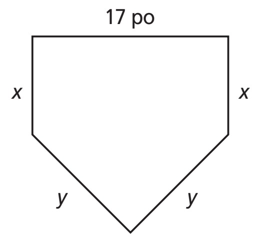
13. Un groupe composé d'adultes et d'élèves fait une sortie éducative au musée Royal Tyrell, près de Drumheller, en Alberta. Le coût d'entrée s'élève à 152 $ en tout. Il y a 13 élèves de plus que d'adultes. Combien d'adultes et combien d'élèves participent à la sortie ?

14. a) Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire : Une boîte de 36 balles de golf a une masse de 1 806 g. Après qu'on enlève 12 balles, la boîte a une masse de 1 254 g.

b) Résous ce problème à l'aide d'un graphique : Quelle est la masse de la boîte et celle d'une balle ?

c) Pourquoi est-il difficile de déterminer une solution ?

15. Le marbre d'un terrain de baseball a la forme d'un pentagone d'un périmètre de 58 po. Chaque petit côté, x, mesure $3\frac{1}{2}$ po de moins que chaque grand côté y. Quelles sont les valeurs de x et de y ?



16. a) Résous graphiquement ce système linéaire.

$2x + 7y = 3$
$4x + 3y = 7$

b) Pourquoi la solution est-elle approximative ?

C

17. Emma a résolu graphiquement un système linéaire. Elle a d'abord déterminé les coordonnées à l'origine de chaque droite.

Équation	Abscisse à l'origine	Ordonnée à l'origine
1	5	5
2	4	6

a) Écris un système linéaire qu'Emma aurait pu résoudre. Explique ton travail.

b) Détermine la solution à l'aide d'un graphique.

18. L'équation $y = 2x + 1$ fait partie d'un système linéaire. La solution du système se trouve dans le troisième quadrant. Quelle peut être l'autre équation ? Explique ce que tu as fait.

19. a) Tu veux résoudre graphiquement le système linéaire suivant. Comment sais-tu que les droites sont perpendiculaires ?

$2x + 3y = -5$
$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2$

b) Écris un autre système linéaire dont les droites sont perpendiculaires. Explique ce que tu as fait.

Réfléchis Comment peux-tu déterminer si la solution est exacte ou approximative lorsque tu résous graphiquement un système linéaire ?

LABORATOIRE

7.3 Résoudre graphiquement un système d'équations linéaires à l'aide de la technologie

OBJECTIF DE LA LEÇON

Déterminer et vérifier graphiquement la solution d'un système linéaire à l'aide de la technologie.

Établis des liens

En 2006, la population du Canada était de 31 612 897 personnes. La population des provinces de l'Est dépassait de 12 369 487 personnes la population des territoires et des provinces de l'Ouest.

Quel système linéaire représente cette situation ? Comment peux-tu déterminer la population des territoires et des provinces de l'Ouest ? Comment peux-tu déterminer celle des provinces de l'Est ? Pourquoi ne peux-tu pas déterminer une solution exacte à l'aide d'un graphique tracé sur du papier quadrillé ?

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.

- Tu as besoin d'une calculatrice à affichage graphique ou d'un ordinateur muni d'un logiciel graphique.

L'école de Léa a organisé une journée d'activités à l'occasion du Festival du Voyageur. Elle a amassé 1 518,75 $. Le coût d'entrée était de 3,75 $ par adulte et 2,50 $ par élève. En tout, 520 personnes ont participé. Combien d'adultes et combien d'élèves y avait-il ?

Avant de créer le graphique, comment sais-tu dans quel quadrant se trouve le point d'intersection ?

Quels réglages dois-tu utiliser pour les tables de valeurs ? Pourquoi ?

A. Représente cette situation à l'aide d'un système linéaire.

B. Écris chaque équation sous la forme explicite. Trace chaque droite.

C. Détermine les coordonnées du point d'intersection des droites. Ces coordonnées sont-elles exactes ou approximatives ? Justifie ta réponse.

D. À l'aide de tables de valeurs, comment peux-tu vérifier la solution obtenue à l'étape C ?

E. Vérifie ta solution à l'aide des données du problème.

F. Comment peux-tu déterminer le nombre d'adultes et le nombre d'élèves qui ont participé à la journée, à partir de tes résultats ?

Évalue ta compréhension

1. Pour résoudre le système linéaire suivant :

$x + 2y = 8$

$3x + 4y = 20$

Gérard a entré chaque équation dans sa calculatrice à affichage graphique sous cette forme :

```
Graph1 Graph2 Graph3
\Y1 = -X/2+4
\Y2 = -3X/4+5
\Y3 =
\Y4 =
\Y5 =
\Y6 =
\Y7 =
```

Gérard a créé une table de valeurs pour ces équations.

X	Y_1	Y_2
0	4	5
1	3.5	4.25
2	3	3.5
3	2.5	2.75
4	2	2
5	1.5	1.25
6	1	.5

X=0

a) Comment Gérard pourrait-il utiliser la table de valeurs pour déterminer la solution du système linéaire ?

b) Décris une autre stratégie que Gérard pourrait utiliser pour résoudre ce système linéaire.

2. a) Décris comment tu peux déterminer graphiquement la solution du système linéaire suivant à l'aide de la technologie.

$3x - 6y = 14$

$x + y = \frac{7}{6}$

b) Quelle est la solution ?

3. Un organisme communautaire a acheté 72 cèdres et épinettes qui seront plantés lors du Jour de la Terre. Le nombre de cèdres est le double du nombre d'épinettes. Combien d'arbres de chaque type l'organisme a-t-il achetés ?

4. a) Chaque système linéaire qui suit contient l'équation $x + 2y = 3$. Résous graphiquement chaque système.

I) $x + 2y = 3$
$2x - y = 1$

II) $x + 2y = 3$
$2x - y = 6$

III) $x + 2y = 3$
$2x - y = 11$

IV) $x + 2y = 3$
$2x - y = 16$

b) Quelles régularités vois-tu dans les systèmes linéaires et leurs solutions ? Prédis un autre système linéaire qui prolongerait la régularité. Explique ta prédiction.

c) Résous ce système linéaire pour vérifier ta prédiction.

5. Lorsque tu résous graphiquement un système linéaire comportant des coefficients fractionnaires, obtiens-tu toujours une solution approximative ? Utilise les systèmes linéaires suivants dans ton explication.

Système A

$\frac{1}{2}x + y = 3$

$x + \frac{1}{2}y = 3$

Système B

$2x + y = \frac{23}{6}$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{55}{36}$

PAUSE VÉRIFICATION 1

Liens

Soit la situation et le problème connexe suivants :

Un magasin a en stock 1 500 balles de golf dans des boîtes.
Il y a 5 boîtes de 12 balles de plus que de boîtes de 24 balles.
Combien de boîtes de chaque type le magasin a-t-il en stock ?

Nommer les variables

Soit x, le nombre de boîtes de 12 balles.

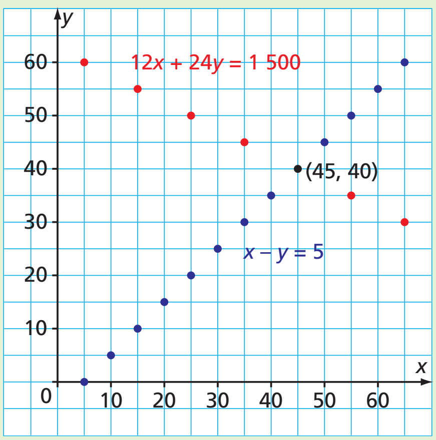
Soit y, le nombre de boîtes de 24 balles.

Représenter la situation à l'aide d'un système linéaire

$12x + 24y = 1\,500$

$x - y = 5$

Tracer un graphique pour repérer le point d'intersection



Déterminer la solution

$x = 45$

$y = 40$

Vérifier la solution à l'aide des deux équations.

Vérifier la solution à l'aide des données du problème.

Présentation des concepts

- **Dans la leçon 7.1 :**
  – tu as défini un système linéaire, tu as représenté des problèmes à l'aide de systèmes linéaires et tu as fait le lien entre des systèmes linéaires et des problèmes.
- **Dans la leçon 7.2 :**
  – tu as résolu des systèmes linéaires en traçant un graphique sur du papier quadrillé et en déterminant les coordonnées du point d'intersection ;
  – tu as déterminé si la solution d'un système linéaire est exacte ou approximative.
- **Dans la leçon 7.3 :**
  – tu as résolu graphiquement des systèmes linéaires à l'aide de la technologie, en exprimant d'abord chaque équation sous la forme $y = f(x)$;
  – tu as déterminé si la solution d'un système linéaire est exacte ou approximative à l'aide de la technologie ;
  – tu as vérifié la solution d'un système linéaire à partir de tables de valeurs.

Évalue ta compréhension

7.1

1. **a)** Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire :
Le stade du Commonwealth d'Edmonton, en Alberta, possède le plus grand écran JumboTron du monde. Son périmètre est de 128 pi. Sa largeur a 16 pi de moins que sa longueur.

b) La longueur de l'écran est de 40 pi et sa largeur, de 24 pi.

i) Vérifie ces dimensions à l'aide des équations.

ii) Vérifie ces dimensions à l'aide des données du problème.

2. Imagine une situation qui peut être représentée par le système linéaire suivant, puis écris un problème connexe.
$10x + 5y = 850$
$x - y = 10$

7.2

3. Résous le système linéaire suivant à l'aide d'un graphique tracé sur du papier quadrillé. Décris ta stratégie.
$2x + y = 1$
$x + 2y = -1$

4. Un centre de culture physique offre les deux méthodes de paiement :
Méthode A : des frais d'adhésion de 75 $, plus 5 $ par visite
Méthode B : 10 $ par visite
Voici un système linéaire qui représente cette situation :
$C = 75 + 5v$
$C = 10v$
où C représente le coût total, en dollars, et v représente le nombre de visites.

a) Représente graphiquement ce système linéaire.

b) Dans quelles conditions la méthode A est-elle la meilleure ? Justifie ta réponse.

5. **a)** Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire : Un groupe d'élèves et d'adultes visite l'aquarium de Vancouver, en Colombie-Britannique. Le coût d'entrée est de 21 $ par élève et de 27 $ par adulte. Le coût total pour 18 personnes est de 396 $.

b) À l'aide d'un graphique, résous ce problème :
Combien d'adultes et combien d'élèves visitent l'aquarium ?

7.3

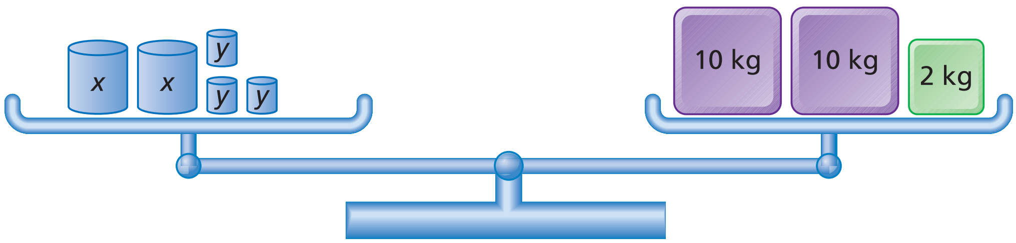
6. **a)** Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire : Un gros arbre absorbe 1,4 kg d'air pollué par année. Un petit arbre en absorbe 0,02 kg par année. Une forêt urbaine comprend 15 000 arbres, petits et gros.
En tout, ces arbres absorbent 7 200 kg d'air pollué chaque année.

b) À l'aide de la technologie, résous graphiquement ce problème :
Combien d'arbres de chaque type y a-t-il dans la forêt ?

7.4 Résoudre un système d'équations linéaires par substitution

OBJECTIF DE LA LEÇON

Résoudre un système linéaire par la substitution d'une variable.



Établis des liens

Examine l'illustration.
Fournit-elle assez d'information pour déterminer la masse des contenants x et celle des contenants y ? Justifie ta réponse.
Que répondrais-tu si tu savais que la masse de chaque contenant x est de 5 kg ? Justifie ta réponse.

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille avec une ou un camarade.

Résous chaque système linéaire sans tracer de graphique.

- $3x + 5y = 6$
  $x = -4$
- $2x + y = 5$
  $y = -x + 3$

Quelles stratégies as-tu utilisées ?
Comment peux-tu vérifier chaque solution ?

Dans les leçons 7.2 et 7.3, tu as résolu graphiquement des systèmes linéaires. Cette stratégie prend du temps, même quand tu utilises la technologie, et donne seulement une solution approximative. L'algèbre permet de déterminer une solution exacte. La **méthode par substitution** est une stratégie algébrique de résolution. Elle consiste à transformer un système de deux équations linéaires en une seule équation à une variable. Il reste ensuite à déterminer la valeur de la variable à l'aide de tes connaissances sur la résolution d'équations linéaires.

Examine le système linéaire suivant :

$3x + 4y = -4$ ①

$x + 2y = 2$ ②

Dans l'équation ②, le coefficient de la variable x est 1. Alors, isole x dans l'équation ②.

$x + 2y = 2$ ②

$x = -2y + 2$

Pourquoi isole-t-on x et non y ?

Puisque la solution du système linéaire est le point d'intersection des deux droites, la coordonnée x du point doit satisfaire les deux équations. Remplace x par l'expression correspondante dans l'autre équation.

Remplace x par $-2y + 2$ dans l'équation ①.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -4 && ① \\ 3(-2y + 2) + 4y &= -4 && \text{Simplifie à l'aide de la distributivité.} \\ -6y + 6 + 4y &= -4 && \text{Regroupe les termes semblables.} \\ -2y &= -10 && \text{Résous l'équation.} \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Une fois que tu connais la valeur d'une des variables, reporte-la dans l'une des équations de départ, puis détermine la valeur de l'autre variable.

Obtiendrais-tu la même solution si tu isolais y plutôt que x dans l'équation ② ? Justifie ta réponse.

Remplace y par 5 dans l'équation ②.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 && ② \\ x + 2(5) &= 2 \\ x + 10 &= 2 && \text{Résous l'équation.} \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Remplace les deux variables par leur valeur dans les équations de départ pour vérifier la solution.
Remplace x par -8 et y par 5 dans chaque équation.

$3x + 4y = -4$ ①

$$\begin{aligned} \text{M. G.} &= 3x + 4y \\ &= 3(-8) + 4(5) \\ &= -24 + 20 \\ &= -4 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

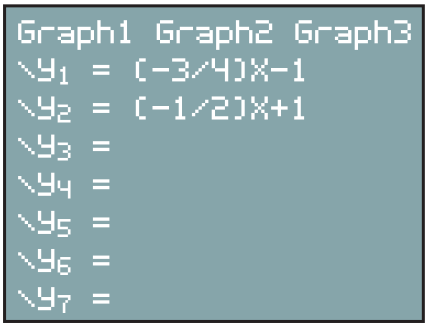
$x + 2y = 2$ ②

$$\begin{aligned} \text{M. G.} &= x + 2y \\ &= -8 + 2(5) \\ &= -8 + 10 \\ &= 2 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

Obtiendrais-tu la même solution si tu remplaçais y par 5 dans l'équation ① plutôt que dans l'équation ② ? Justifie ta réponse.

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite ; la solution est donc $x = -8$ et $y = 5$.

Voici la solution graphique du système linéaire de la page précédente.



Exemple 1 Résoudre un système linéaire par substitution

Résous le système linéaire suivant :

$2x - 4y = 7$
$4x + y = 5$

SOLUTIONS

Méthode nº 1

$2x - 4y = 7$ ①
$4x + y = 5$ ②

Isole y dans l'équation ②.

$4x + y = 5$ ②
$y = 5 - 4x$

Remplace y par $5 - 4x$ dans l'équation ①.

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 7 \quad ① \\ 2x - 4(5 - 4x) &= 7 \\ 2x - 20 + 16x &= 7 \\ 18x &= 27 \\ x &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Remplace x par 1,5 dans l'équation ②.

$$\begin{aligned} 4x + y &= 5 \quad ② \\ 4(1{,}5) + y &= 5 \\ 6 + y &= 5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Résous le système linéaire suivant :
$5x - 3y = 18$
$4x - 6y = 18$

[Réponse : $x = 3$ et $y = -1$]

Méthode n° 2

Dans le cas où aucune des équations ne contient une variable avec le coefficient 1, vérifie si deux termes semblables ont des coefficients dont l'un est un multiple de l'autre.

$2x - 4y = 7$ ①
$4x + y = 5$ ②

Dans l'équation ②, tu peux réécrire le terme $4x$ sous la forme $2(2x)$:

$2(2x) + y = 5$ ③

Lorsque tu changes la forme d'une équation, attribue-lui un autre numéro.

Isole $2x$ dans l'équation ①.

$2x - 4y = 7$ ①
$2x = 7 + 4y$

Remplace $2x$ par $7 + 4y$ dans l'équation ③.

$$
\begin{aligned}
2(2x) + y &= 5 \quad ③\\
2(7 + 4y) + y &= 5\\
14 + 8y + y &= 5\\
9y &= -9\\
y &= -1
\end{aligned}
$$

Simplifie puis isole y.

Remplace y par -1 dans l'équation ①.

$$
\begin{aligned}
2x - 4y &= 7\\
2x - 4(-1) &= 7\\
2x + 4 &= 7\\
2x &= 3\\
x &= 1{,}5
\end{aligned}
$$

Résous l'équation.

Vérifie la solution.
Remplace x par 1,5 et y par -1 dans chaque équation.

$2x - 4y = 7$ ①

$$
\begin{aligned}
\text{M. G.} &= 2x - 4y\\
&= 2(1{,}5) - 4(-1)\\
&= 3 + 4\\
&= 7\\
&= \text{M. D.}
\end{aligned}
$$

$4x + y = 5$ ②

$$
\begin{aligned}
\text{M. G.} &= 4x + y\\
&= 4(1{,}5) - 1\\
&= 6 - 1\\
&= 5\\
&= \text{M. D.}
\end{aligned}
$$

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite ; la solution est donc $x = 1{,}5$ et $y = -1$.

Pourquoi écris-tu $4x = 2(2x)$ et non $4y = 2(2y)$?

La solution est-elle la même si tu remplaces y par -1 dans l'équation ② ? Vérifie-le.

Exemple 2 Résoudre un problème à l'aide d'un système linéaire

a) Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire :
Nuri a placé 2 000 $: une partie à un taux d'intérêt annuel de 8 % et le reste à un taux d'intérêt annuel de 10 %. L'intérêt total au bout d'un an est de 190 $.

b) Résous le problème suivant : Quel montant d'argent Nuri a-t-il placé à chaque taux ?

SOLUTIONS

a) Établis les équations à l'aide d'un tableau.

Données fournies	Établir un système linéaire
Il y a deux placements.	Soit x, le montant en dollars à un taux annuel de 8 %. Soit y, le montant en dollars à un taux annuel de 10 %.
Somme totale placée : 2 000 $	Équation : $x + y = 2\ 000$
x dollars à 8 %	L'intérêt de 8 % de x dollars : $0{,}08x$
y dollars à 10 %	L'intérêt de 10 % de y dollars : $0{,}10y$
Intérêt total : 190 $	Autre équation : $0{,}08x + 0{,}10y = 190$

Le système linéaire est :

$x + y = 2\ 000$ ①
$0{,}08x + 0{,}10y = 190$ ②

b) Méthode nº 1

Puisque x et y ont le coefficient 1 dans l'équation ①, résous le système linéaire par substitution.
Isole y dans l'équation ①.

$x + y = 2\ 000$ ①
$y = -x + 2\ 000$

Remplace y par $-x + 2\ 000$ dans l'équation ②.

$0{,}08x + 0{,}10y = 190$ ②
$0{,}08x + 0{,}10(-x + 2\ 000) = 190$ Applique la distributivité.
$0{,}08x - 0{,}10x + 200 = 190$ Regroupe les termes semblables.
$-0{,}02x + 200 = 190$
$-0{,}02x = -10$ Divise chaque membre par $-0{,}02$.
$x = 500$

Remplace x par 500 dans l'équation ①.

$x + y = 2\ 000$
$500 + y = 2\ 000$ Résous l'équation.
$y = 1\ 500$

Nuri a placé 500 $ à 8 % et 1 500 $ à 10 %.

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. a) Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire :
Alexia a placé 1 800 $: une partie à un taux d'intérêt annuel de 3,5 % et le reste à un taux d'intérêt annuel de 4,5 %. L'intérêt total au bout d'un an est de 73 $.

b) Résous le problème suivant : Quel montant d'argent Alexia a-t-elle placé à chaque taux ?

[Réponses : a) $x + y = 1\ 800$, $0{,}035x + 0{,}045y = 73$; b) Alexia a placé 800 $ à 3,5 % et 1 000 $ à 4,5 %.]

Pour quelle raison pourrais-tu choisir de multiplier l'équation ② par 100 ?

Méthode nº 2

Résous graphiquement le système linéaire et le problème à l'aide de la technologie.

Exprime chaque équation sous la forme explicite.

$x + y = 2\,000$ $\quad\quad$ $0{,}08x + 0{,}10y = 190$

$y = -x + 2\,000$ $\quad\quad$ $0{,}10y = -0{,}08x + 190$

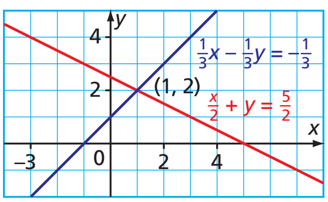
$y = -0{,}8x + 1\,900$

Représente graphiquement chaque équation.

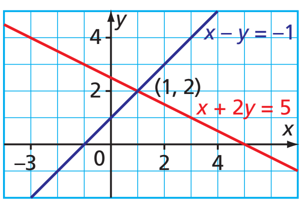
Les droites se coupent au point (500, 1 500).
La solution est $x = 500$ et $y = 1\,500$.
Donc, Nuri a placé 500 $ à 8 % et 1 500 $ à 10 %.
Vérifie la solution à l'aide des données du problème.
Additionne les montants : 500 $ + 1 500 $ = 2 000 $, soit la somme totale placée.
8 % de 500 $ donne 40 $ et 10 % de 1 500 $ donne 150 $.
Additionne ces intérêts.
L'intérêt total est de 40 $ + 150 $ = 190 $.
Les nombres concordent avec les données du problème ; la solution est donc juste.

Ces deux systèmes linéaires ont le même graphique et la même solution, soit $x = 1$ et $y = 2$.

Système A



Système B



Dans le système A, tu peux multiplier la première équation par 2 et la deuxième équation par 3 pour éliminer les fractions. Tu obtiens les équations du système B.

Système A			**Système B**	
$\frac{x}{2} + y = \frac{5}{2}$	①	Multiplie chaque terme par 2.	$x + 2y = 5$	③
$\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y = -\frac{1}{3}$	②	Multiplie chaque terme par 3.	$x - y = -1$	④

Les deux systèmes linéaires ont la même solution, soit $x = 1$ et $y = 2$, puisque les équations correspondantes sont équivalentes : l'équation ① est équivalente à l'équation ③, et l'équation ② est équivalente à l'équation ④.
En multipliant ou en divisant les équations d'un système linéaire par un nombre autre que zéro, on ne modifie pas son graphique. Ainsi, le point d'intersection et, par conséquent, la solution du système linéaire, ne changent pas.

Un système d'équations équivalentes s'appelle un **système linéaire équivalent ;** il a la même solution que le système linéaire de départ.

Lorsqu'une équation d'un système linéaire a un coefficient ou un terme constant fractionnaire, tu peux multiplier l'équation par un dénominateur commun afin d'écrire une équation équivalente dont les coefficients sont des nombres entiers.

Exemple 3 Résoudre un système linéaire qui a des coefficients fractionnaires

Résous ce système linéaire par substitution.

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -1$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{3}$$

SOLUTIONS

Méthode nº 1

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -1 \qquad ①$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{3} \qquad ②$$

Écris un système linéaire équivalent dont les coefficients sont des nombres entiers.
Pour l'équation ① :

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -1 \qquad \text{Multiplie chaque terme par 6.}$$

$$6\left(\frac{1}{2}x\right) + 6\left(\frac{2}{3}y\right) = 6(-1) \qquad \text{Simplifie le tout.}$$

$$3x + 4y = -6 \qquad ③$$

Pour l'équation ② :

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{3} \qquad \text{Multiplie chaque terme par 12.}$$

$$12(y) = 12\left(\frac{1}{4}x\right) - 12\left(\frac{5}{3}\right) \qquad \text{Simplifie le tout.}$$

$$12y = 3x - 20 \qquad ④$$

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. Résous ce système linéaire par substitution.

$$\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}y = -2$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$$

[Réponse : $x = -\frac{23}{3}$ et $y = -\frac{55}{24}$]

Pourquoi multiplies-tu l'équation ① par 6 et l'équation ② par 12 ?

Isole $3x$ dans l'équation ③.

$3x + 4y = -6$ ③

$3x = -4y - 6$

Les équations ③ et ④ forment un système équivalent au système linéaire formé par les équations ① et ②.

Remplace $3x$ par $-4y - 6$ dans l'équation ④.

$12y = 3x - 20$ ④

$12y = (-4y - 6) - 20$

$12y = -4y - 26$ Résous l'équation.

$16y = -26$

$y = -\frac{26}{16}$, ou $-\frac{13}{8}$

Remplace y par $-\frac{13}{8}$ dans l'équation ④.

$12y = 3x - 20$ ④

$12\left(-\frac{13}{8}\right) = 3x - 20$ Isole x.

$-\frac{39}{2} = 3x - 20$

$20 - \frac{39}{2} = 3x$

$\frac{40}{2} - \frac{39}{2} = 3x$

$\frac{1}{2} = 3x$ Divise chaque membre par 3.

$x = \frac{1}{6}$

Méthode nº 2

$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -1$ ①

$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{3}$ ②

Puisque y est isolée dans l'équation ②,
reporte l'expression correspondante dans l'équation ①.

$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -1$ ①

$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{3}\right) = -1$ Applique la distributivité.

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x - \frac{10}{9} = -1$ Regroupe les termes semblables.

$\frac{2}{3}x - \frac{10}{9} = -1$ Isole x.

$\frac{2}{3}x = -1 + \frac{10}{9}$

$\frac{2}{3}x = \frac{1}{9}$ Divise chaque membre par $\frac{2}{3}$.

$x = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\right)$

$x = \frac{1}{6}$

(Suite de la solution à la page suivante)

Remplace x par $\frac{1}{6}$ dans l'équation ②.

$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{3}$ ②

$y = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right) - \frac{5}{3}$

$y = \frac{1}{24} - \frac{5}{3}$

$y = \frac{1}{24} - \frac{40}{24}$

$y = -\frac{39}{24}$, ou $-\frac{13}{8}$

Vérifie la solution.

Remplace x par $\frac{1}{6}$ et y par $-\frac{13}{8}$ dans chaque équation.

$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -1$ ① $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{3}$ ②

$$\begin{aligned}
\text{M. G.} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{13}{8}\right)\\
&= \frac{1}{12} - \frac{13}{12}\\
&= -1\\
&= \text{M. D.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{M. G.} &= -\frac{13}{8}\\
\text{M. D.} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right) - \frac{5}{3}\\
&= \frac{1}{24} - \frac{5}{3}\\
&= \frac{1}{24} - \frac{40}{24}\\
&= -\frac{39}{24}, \text{ ou } -\frac{13}{8}\\
&= \text{M. G.}
\end{aligned}$$

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite ; la solution est donc

$x = \frac{1}{6}$ et $y = -\frac{13}{8}$.

Place à la discussion

1. Comment peux-tu établir un système linéaire équivalent à un système d'équations linéaires donné ?
2. Comment détermines-tu par quel nombre tu dois multiplier une équation pour obtenir une équation équivalente dont les coefficients sont des nombres entiers ? Inclus un exemple dans ton explication.
3. Quels avantages y a-t-il à résoudre un système linéaire par substitution plutôt que par la méthode graphique ?

Exercices

A

4. Résous chaque système linéaire par substitution.

a) $y = 9 - x$
$2x + 3y = 11$

b) $x = y - 1$
$3x - y = 11$

c) $x = 7 + y$
$2x + y = -10$

d) $3x + y = 7$
$y = x + 3$

5. Résous chaque système linéaire.

a) $2x + 3y = 11$
$4x - y = -13$

b) $4x + y = -5$
$2x + 3y = 5$

c) $x + 2y = 13$
$2x - 3y = -9$

d) $3x + y = 7$
$5x + 2y = 13$

B

6. **a)** Repère deux termes semblables dans chaque système linéaire et explique leur relation.

I) $2x - 3y = 2$
$4x - 4y = 2$

II) $40x + 10y = 10$
$3x + 5y = 5$

III) $-3x + 6y = 9$
$5x - 2y = -7$

IV) $-3x + 4y = 6$
$9x + 3y = 27$

b) Résous chaque système linéaire en a).

7. **a)** Tu veux résoudre un système linéaire avec le moins d'étapes possible. Quel système linéaire, parmi les suivants, choisiras-tu ? Pourquoi ?

I) $x - y = -5$
$x = -1$

II) $x - y = -5$
$-x - y = 3$

III) $2x - 3y = 7$
$x - 2y = 3$

b) Résous chaque système linéaire en a). Explique ce que tu as fait.

8. **a)** Pour chaque équation, indique un nombre par lequel tu peux multiplier chaque terme afin d'avoir uniquement des coefficients et des termes constants qui sont des nombres entiers. Explique tes choix. Écris un système linéaire équivalent.

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 2$$
$$\frac{5x}{6} + \frac{3y}{4} = 1$$

b) Vérifie que les deux systèmes linéaires en a) ont la même solution.

9. **a)** Choisis un diviseur pour chaque équation. Écris le système linéaire équivalent que tu obtiens quand tu divises chaque terme de l'équation par ce diviseur.
$2x + 2y = -4$
$-12x + 4y = -24$

b) Montre que les systèmes linéaires en a) ont la même solution.

Pour les questions 10 à 18, représente la situation à l'aide d'un système linéaire. Résous ce système linéaire afin de résoudre le problème connexe.

10. Lors d'une étude, on a noté la réaction de 186 ours polaires à l'approche d'un buggy de toundra. Certains ours n'ont pas réagi. D'autres se sont assis, se sont mis debout, ou se sont éloignés en marchant ou en courant. On a compté 94 ours sans réaction de plus que d'ours qui ont réagi. Combien d'ours ont réagi et combien d'ours n'ont pas réagi ?

11. Louise a acheté un drapeau métis dont la longueur mesure 90 cm de plus que la largeur. Le périmètre du drapeau est de 540 cm. Quelles sont les dimensions du drapeau ?

12. Quarante-cinq jeunes et adultes ont répondu à un sondage sur leur utilisation d'Internet. Parmi eux, 31 ont dit être de grands utilisateurs d'Internet. Ce nombre représente 80 % des jeunes et 60 % des adultes. Combien de jeunes et combien d'adultes ont répondu au sondage ?

13. Au Canadian Fossil Discovery Centre de Morden, au Manitoba, des élèves aident à déterrer les restes fossiles de reptiles vieux de 80 millions d'années. Quarante-sept élèves, en groupes de 4 ou de 5, cherchent des fossiles. Combien de groupes de 4 et combien de groupes de 5 y a-t-il ?

14. Une galerie d'art a 85 masques d'animaux et d'humains. Soixante pour cent des masques d'humains et 40 % des masques d'animaux sont en faux cyprès. Il y a 38 masques en tout en faux cyprès. Combien de masques d'humains et combien de masques d'animaux y a-t-il ?

15. Sam a obtenu 80 % à la partie A d'un examen et 92 % à la partie B. Sa note globale est de 63 points sur un total possible de 75. Combien de points vaut chaque partie ?

16. Luce a placé 5 000 $ pour un an dans deux obligations d'épargne. Une obligation rapporte un intérêt annuel de 2,5 %, et l'autre, un intérêt annuel de 3,75 %. L'intérêt total s'élève à 162,50 $. Quel montant Luce a-t-elle placé dans chaque obligation ?

17. Tania travaille à temps partiel dans un comptoir de crème glacée. Samedi, elle a vendu 76 cornets à une boule et 49 cornets à deux boules. Le montant total des ventes est de 474,25 $. Dimanche, elle a vendu 54 cornets à une boule et 37 cornets à deux boules. Le montant total des ventes est de 346,25 $. Combien coûte chaque cornet ?

18. Joël travaille à temps partiel et gagne 40 $ par fin de semaine. Suzanne travaille aussi à temps partiel. Elle a reçu 150 $ à son embauche et gagne 30 $ par fin de semaine. Pendant combien de fins de semaine Joël doit-il travailler pour avoir le même montant que Suzanne ?

19. Résous chaque système linéaire.

a) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 1$

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = \frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = -\frac{7}{12}$

$x - y = -\frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{3}x - \frac{3}{8}y = 1$

$-\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y = \frac{3}{2}$

d) $\frac{7}{4}x + \frac{4}{3}y = 3$

$\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}y = 2$

20. Ce système linéaire a servi à résoudre un problème sur le coût de rames de papier et de cartouches d'encre pour le laboratoire informatique d'une école :

$7{,}50r + 45c = 375$

$r - c = 15$

a) Imagine une situation qui peut être représentée par ce système linéaire. Écris un problème connexe.

b) Résous le système linéaire et le problème.

21. Imagine une situation qui peut être représentée par le système linéaire suivant. Écris un problème connexe. Résous le système linéaire et le problème.

$2x + 4y = 98$

$x + y = 27$

22. **a)** Écris un système linéaire équivalent au système suivant. Explique ce que tu as fait.

$2x - y = -4$

$3x + 2y = 1$

b) Résous chaque système linéaire. Comment tes solutions montrent-elles que les systèmes sont équivalents ?

C

23. Une fin de semaine, des cyclistes quittent Penticton, en Colombie-Britannique, pour se rendre au lac Chute. La montée réduit leur vitesse moyenne habituelle de 6 km/h. Il leur faut 4 h pour se rendre au lac. Au retour, la descente augmente leur vitesse moyenne habituelle de 4 km/h. Les cyclistes reviennent à Penticton en 2 h.

a) Quelle est leur vitesse moyenne habituelle ?

b) Quelle distance sépare Penticton du lac Chute ?

24. Les chercheurs du centre Nk'Mip Desert & Heritage d'Osoyoos, en Colombie-Britannique, ont mesuré la masse de 45 serpents à sonnette femelles et de 100 serpents à sonnette mâles. La masse moyenne de tous les serpents est de 194 g. La masse moyenne des mâles est supérieure de 37,7 g à la masse moyenne des femelles. Détermine la masse moyenne des mâles et la masse moyenne des femelles. Montre ton travail.

25. Après avoir atteint son altitude de croisière, un avion a continué son ascension pendant 10 min. Puis, il a effectué une descente pendant 15 min. À ce moment, son altitude était inférieure de 1 000 m à son altitude de croisière. L'écart entre sa vitesse d'ascension et sa vitesse de descente est de 400 m/min. Détermine la vitesse d'ascension et la vitesse de descente.

26. Explique pourquoi x égalera toujours y dans la solution de ce système linéaire pour toutes les valeurs non nulles de A, B et C telles que $A \neq B$.
$Ax + By = C$
$Bx + Ay = C$

27. La solution du système linéaire suivant est $(-2, 3)$.
Quelles sont les valeurs de A et de B?
Montre ton travail.
$Ax + By = -17$
$Bx + Ay = 18$

Réfléchis

Lorsque tu résous un système linéaire par substitution, que choisis-tu en premier : l'équation sur laquelle tu travailleras d'abord ou la variable à isoler ? Justifie ta réponse à l'aide d'un exemple.

L'UNIVERS DES MATHS

Le monde du travail : Les techniciens en électronique

Une technicienne ou un technicien en électronique assemble, installe, dépanne et répare le matériel électronique utilisé par des clients résidentiels ou d'affaires. Elle ou il peut déterminer le courant et la tension d'un circuit électrique à l'aide de la solution d'un système linéaire.

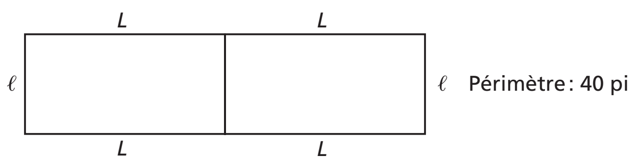
7.5 Résoudre un système d'équations linéaires par élimination

OBJECTIF DE LA LEÇON

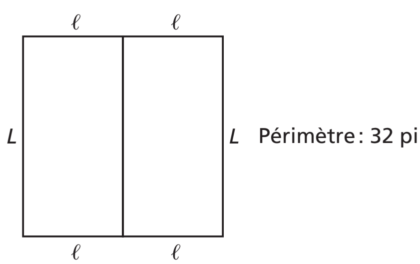
Résoudre un système linéaire par l'élimination d'une variable.

Établis des liens

Un charpentier-menuisier a placé deux panneaux de contreplaqué identiques bout à bout et a mesuré leur périmètre.



Il a ensuite placé les panneaux côte à côte et a mesuré leur périmètre.



Tu veux déterminer les dimensions d'un panneau de contreplaqué.
Quel système linéaire peut représenter la situation ?
Comment peux-tu résoudre ce système ?

Développe ta compréhension

FAIS UN ESSAI

Travaille avec une ou un camarade.
Utilise un outil technologique graphique, si possible.

Utilise le système linéaire suivant :
$x + 2y = 10$ ①
$x + y = 7$ ②

A. Additionne les termes semblables des équations ① et ② pour créer l'équation ③. Représente graphiquement les trois équations dans la même fenêtre d'affichage ou dans le même plan cartésien. Que remarques-tu ?

B. Soustrais l'équation ② de l'équation ① pour créer l'équation ④. Représente graphiquement les quatre équations dans la même fenêtre d'affichage ou dans le même plan cartésien. Que remarques-tu ?

C. Comment le fait de soustraire l'équation ② de l'équation ① peut-il t'aider à résoudre le système ? Additionner les équations t'aiderait-il à résoudre le système ? Justifie ta réponse.

D. Crée et résous un système linéaire où le coefficient de y est le même dans chaque équation. Additionne puis soustrais les équations afin d'obtenir deux autres équations linéaires. Représente graphiquement quatre équations. Que remarques-tu ?

E. Comment additionner ou soustraire les équations t'aide-t-il à résoudre un système linéaire ?

Quand tu additionnes ou soustrais les termes semblables de deux équations linéaires, pourquoi obtiens-tu toujours une autre équation linéaire ?

Dans la leçon 7.4, tu as vu que le fait de multiplier ou de diviser chaque équation d'un système linéaire par un nombre autre que zéro ne modifie pas la solution, puisque les systèmes linéaires que tu obtiens sont équivalents.

De même, additionner ou soustraire les deux équations d'un système linéaire produit un système linéaire équivalent. Cette propriété permet de résoudre un système linéaire en éliminant d'abord une variable par l'addition ou la soustraction des deux équations. C'est la **méthode par élimination.**

Pourquoi met-on l'équation ② entre parenthèses lorsqu'on la soustrait ?

Soit le système linéaire suivant :

$2x + y = -7$ ①

$x + y = -4$ ②

Les coefficients de y sont égaux, donc tu peux soustraire les équations afin d'éliminer y.

Soustrais l'équation ② de l'équation ① pour déterminer la valeur de x.

$$\begin{array}{rl} 2x + y = -7 & ① \\ -(x + y = -4) & ② \\ \hline 2x + y - x - y = -7 - (-4) & \\ x = -3 & \end{array}$$

Regroupe les termes semblables.

Remplace x par -3 dans l'équation ① pour déterminer la valeur de y.

$$\begin{aligned} 2x + y &= -7 \quad ① \\ 2(-3) + y &= -7 \\ -6 + y &= -7 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Résous l'équation.

Vérifie la solution. Remplace x par -3 et y par -1 dans chaque équation.

$2x + y = -7$ ①

$$\begin{aligned} \text{M. G.} &= 2x + y \\ &= 2(-3) + (-1) \\ &= -6 - 1 \\ &= -7 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

$x + y = -4$ ②

$$\begin{aligned} \text{M. G.} &= x + y \\ &= -3 + (-1) \\ &= -4 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite ; la solution est donc $x = -3$ et $y = -1$

On doit parfois multiplier une des équations ou les deux par une constante afin de pouvoir éliminer une variable par l'addition ou la soustraction des équations.

Exemple 1 Résoudre un système linéaire en soustrayant pour éliminer une variable

Résous le système linéaire suivant par élimination :

$3x - 4y = 7$

$5x - 6y = 8$

SOLUTION

$3x - 4y = 7$ ①

$5x - 6y = 8$ ②

Les termes semblables n'ont pas le même coefficient.

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Résous le système linéaire suivant par élimination :

   $2x + 7y = 24$

   $3x - 2y = -4$

   [Réponse : $x = 0{,}8$ et $y = 3{,}2$]

Examine les termes en x.
Leur plus petit commun multiple est 15.
Multiplie l'équation ① par 5 et l'équation ② par 3 pour obtenir des termes en x égaux.

5 × équation ① : $5(3x - 4y = 7) \rightarrow 15x - 20y = 35$ ③
3 × équation ② : $3(5x - 6y = 8) \rightarrow 15x - 18y = 24$ ④

Ces équations forment un système linéaire équivalent.

Soustrais l'équation ④ de l'équation ③ pour éliminer x et résoudre ce système linéaire.

$$
\begin{aligned}
15x - 20y &= 35 && ③\\
-(15x - 18y &= 24) && ④\\
\hline
-20y - (-18y) &= 35 - 24\\
-2y &= 11\\
y &= -5{,}5
\end{aligned}
$$

Par quel nombre multiplierais-tu chaque équation pour être en mesure d'éliminer y par soustraction ?

Remplace y par $-5{,}5$ dans l'équation ①.

$$
\begin{aligned}
3x - 4y &= 7 && ①\\
3x - 4(-5{,}5) &= 7 && \text{Résous l'équation.}\\
3x + 22 &= 7\\
3x &= -15\\
x &= -5
\end{aligned}
$$

Vérifie la solution.
Remplace x par -5 et y par $-5{,}5$ dans chaque équation.

$3x - 4y = 7$ ①

$$
\begin{aligned}
\text{M. G.} &= 3x - 4y\\
&= 3(-5) - 4(-5{,}5)\\
&= -15 + 22\\
&= 7\\
&= \text{M. D.}
\end{aligned}
$$

$5x - 6y = 8$ ②

$$
\begin{aligned}
\text{M. G.} &= 5x - 6y\\
&= 5(-5) - 6(-5{,}5)\\
&= -25 + 33\\
&= 8\\
&= \text{M. D.}
\end{aligned}
$$

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite ; la solution est donc $x = -5$ et $y = -5{,}5$.

On doit parfois écrire des équations équivalentes qui ont des nombres entiers comme coefficients avant d'utiliser la méthode par élimination.

Exemple 2 Résoudre un système linéaire en additionnant pour éliminer une variable

Résous le système linéaire suivant par élimination :

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 4$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{5}{2}$

SOLUTION

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 4$ ①

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{5}{2}$ ②

Multiplie chaque équation par un dénominateur commun.

$6 \times$ équation ① : $6\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 4\right)$

$$6\left(\frac{2}{3}x\right) - 6\left(\frac{1}{2}y\right) = 6(4)$$

$$4x - 3y = 24 \quad ③$$

$4 \times$ équation ② : $4\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{5}{2}\right)$

$$4\left(\frac{1}{2}x\right) + 4\left(\frac{1}{4}y\right) = 4\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$2x + y = 10 \quad ④$$

Voici un système linéaire équivalent :

$4x - 3y = 24$ ③

$2x + y = 10$ ④

Afin d'éliminer y, tu dois d'abord multiplier l'équation ④ par 3 pour que les termes en y aient le même coefficient.

$3 \times$ équation ④ : $3(2x + y = 10) \rightarrow 6x + 3y = 30$ ⑤

Voici un système linéaire équivalent :

$6x + 3y = 30$ ⑤

$4x - 3y = 24$ ③

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Résous le système linéaire suivant par élimination.

$\frac{3}{4}x - y = 2$

$\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y = 2$

[Réponse : $x = 8$ et $y = 4$]

Suppose que tu multiplies l'équation ① par $\frac{1}{2}$. Comment cela t'aiderai-t-il à éliminer une variable ?

Effectue l'addition :

$$\begin{array}{rl} 6x + 3y = 30 & ⑤ \\ + (4x - 3y = 24) & ③ \\ \hline 10x \quad\;\; = 54 & \\ x \quad\;\; = 5{,}4 & \end{array}$$

Résous l'équation.

Remplace x par 5,4 dans l'équation ①.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 4 \qquad ①$$

$$\frac{2}{3}(5{,}4) - \frac{1}{2}y = 4$$

$$3{,}6 - \frac{1}{2}y = 4$$

Regroupe les termes semblables.

$$-\frac{1}{2}y = 4 - 3{,}6$$

$$-\frac{1}{2}y = 0{,}4$$

Multiplie chaque membre par -2.

$$y = -2(0{,}4)$$

$$y = -0{,}8$$

Vérifie la solution.
Remplace x par 5,4 et y par $-0{,}8$ dans chaque équation.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 4 \qquad ①$$

$$\begin{aligned} \text{M. G.} &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y \\ &= \frac{2}{3}(5{,}4) - \frac{1}{2}(-0{,}8) \\ &= 3{,}6 + 0{,}4 \\ &= 4 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{5}{2} \qquad ②$$

$$\begin{aligned} \text{M. G.} &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \\ &= \frac{1}{2}(5{,}4) + \frac{1}{4}(-0{,}8) \\ &= 2{,}7 - 0{,}2 \\ &= 2{,}5 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite ; la solution est donc $x = 5{,}4$ et $y = -0{,}8$.

Quelle autre stratégie pourrais-tu utiliser pour résoudre ce système linéaire ?

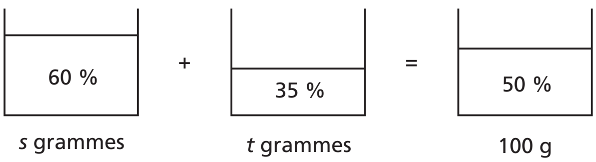
Exemple 3 Résoudre un problème à l'aide d'un système linéaire

a) Représente cette situation à l'aide d'un système linéaire :
Un alliage est un mélange de métaux. Un artiste doit créer un bracelet d'une masse de 100 g fait d'un alliage à 50 % d'argent. Il a un alliage à 60 % d'argent et un à 35 %.

b) Résous le problème suivant : Quelles masses de chaque alliage doit-il combiner afin d'obtenir l'alliage désiré ?

SOLUTION

a) Soit s, la masse en grammes de l'alliage à 60 % d'argent, et t, la masse en grammes de l'alliage à 35 % d'argent.
Fais un schéma.



Selon le schéma :
La masse du bracelet, soit 100 g, est la somme d'une masse s, en grammes, de l'alliage à 60 % d'argent et d'une masse t, en grammes, de l'alliage à 35 % d'argent.
La première équation est donc $s + t = 100$.

La masse de l'argent présent dans le bracelet doit correspondre à 50 % de 100 g : $0{,}50(100\text{ g}) = 50\text{ g}$
Ces 50 g d'argent comprennent 60 % de s et 35 % de t.
La deuxième équation est donc $0{,}60s + 0{,}35t = 50$.

Voici le système linéaire :
$s + t = 100$ ①
$0{,}60s + 0{,}35t = 50$ ②

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

3. **a)** Représente cette situation à l'aide d'un système linéaire :
Une artiste doit créer une statue d'un corbeau d'une masse de 625 g faite d'un alliage à 40 % d'argent. Elle a un alliage à 50 % d'argent et un à 25 %.

b) Résous le problème suivant : Quelles masses de chaque alliage doit-elle combiner afin d'obtenir l'alliage désiré ?

[Réponses : a) $c + v = 625$, $0{,}50c + 0{,}25v = 250$; b) 375 g de l'alliage à 50 % et 250 g de l'alliage à 25 %]

b) Multiplie l'équation ① par 0,60, puis soustrais pour éliminer s.

$0{,}60 \times$ équation ① : $0{,}60(s + t = 100)$

$0{,}60s + 0{,}60t = 60$ ③

Applique la distributivité.

Soustrais l'équation ③ de l'équation ②.

$$\begin{array}{rl} 0{,}60s + 0{,}35t = 50 & ② \\ -(0{,}60s + 0{,}60t = 60) & ③ \\ \hline -0{,}25t = -10 & \\ t = 40 & \end{array}$$

Divise chaque membre par $-0{,}25$.

Remplace t par 40 dans l'équation ①.

$$\begin{array}{rl} s + t = 100 & ① \\ s + 40 = 100 & \\ s = 60 & \end{array}$$

Il faut combiner 60 g de l'alliage à 60 % et 40 g de l'alliage à 35 %.
Vérifie la solution à partir des données du problème.
Le bracelet a une masse de 100 g, et 60 g + 40 g = 100 g.
L'artiste utilise 60 g d'alliage à 60 % d'argent .
La masse d'argent de cet alliage dans le bracelet est donc de 60 % de 60 g = 36 g.
L'artiste utilise 40 g d'alliage à 35 % d'argent. La masse d'argent de cet alliage dans le bracelet est donc de 35 % de 40 g = 14 g.
La masse d'argent dans le bracelet est de 36 g + 14 g = 50 g, ce qui représente 50 % de sa masse totale de 100 g.
L'artiste doit donc combiner 60 g d'alliage à 60 % d'argent et 40 g d'alliage à 35 % d'argent.

Pourquoi ne pourrais-tu pas trouver de solution si le bracelet était fabriqué d'un alliage à 25 % d'argent ?

L'UNIVERS DES MATHS

Fait insuité : Un système linéaire à trois variables

On peut résoudre un système de trois équations linéaires à trois variables en utilisant les méthodes par substitution et par d'élimination.

$$\begin{array}{ll} x + 4y + 3z = 5 & ① \\ x + 3y + 2z = 4 & ② \\ x + y - z = -1 & ③ \end{array}$$

Élimine d'abord la variable x. Soustrais l'équation ② de l'équation ①, puis soustrais l'équation ③ de l'équation ②.

$$\begin{array}{rl} x + 4y + 3z = 5 & ① \\ -(x + 3y + 2z = 4) & ② \\ \hline y + z = 1 & ④ \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x + 3y + 2z = 4 & ② \\ -(x + y - z = -1) & ③ \\ \hline 2y + 3z = 5 & ⑤ \end{array}$$

Tu obtiens les équations ④ et ⑤, qui forment un système linéaires à deux variables. Résous ce système linéaire pour les variables y et z.
Détermine ensuite la valeur de x. Vérifie ta solution.

Exemple 4 — Résoudre un système linéaire en déterminant la valeur de chaque variable de façon indépendante

Résous le système linéaire suivant :

$2x + 3y = 8$

$5x - 4y = -6$

SOLUTION

$2x + 3y = 8$ ①

$5x - 4y = -6$ ②

Élimine d'abord x. Le plus petit commun multiple des coefficients de x est 10.
Multiplie l'équation ① par 5 et l'équation ② par 2, puis soustrais.

$$\begin{array}{ll} 5 \times \text{équation ①}: & 10x + 15y = 40 \\ 2 \times \text{équation ②}: & \underline{-(10x - 8y = -12)} \\ & \qquad 23y = 52 \\ & \qquad\ \ y = \dfrac{52}{23} \end{array}$$

Élimine ensuite y. Le plus petit commun multiple des coefficients de y est 12.
Multiplie l'équation ① par 4 et l'équation ② par 3, puis additionne.

$$\begin{array}{ll} 4 \times \text{équation ①}: & 8x + 12y = 32 \\ 3 \times \text{équation ②}: & \underline{+(15x - 12y = -18)} \\ & \qquad 23x = 14 \\ & \qquad\ \ x = \dfrac{14}{23} \end{array}$$

Vérifie la solution.

Remplace x par $\frac{14}{23}$ et y par $\frac{52}{23}$ dans chaque équation.

$2x + 3y = 8$ ①

$$\begin{aligned} \text{M. G.} &= 2\left(\frac{14}{23}\right) + 3\left(\frac{52}{23}\right) \\ &= \frac{28}{23} + \frac{156}{23} \\ &= \frac{184}{23} \\ &= 8 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

$5x - 4y = -6$ ②

$$\begin{aligned} \text{M. G.} &= 5\left(\frac{14}{23}\right) - 4\left(\frac{52}{23}\right) \\ &= \frac{70}{23} - \frac{208}{23} \\ &= -\frac{138}{23} \\ &= -6 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite ; la solution est donc $x = \frac{14}{23}$ et $y = \frac{52}{23}$.

Quel avantage y a-t-il à ne pas remplacer y par $\frac{52}{23}$ dans l'une des équations lorsque tu veux déterminer la valeur de x ?

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

4. Résous le système linéaire suivant :

$3x + 9y = 5$

$9x - 6y = -7$

[Réponse : $x = -\frac{1}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$]

Place à la discussion

1. Lorsque tu résous un système linéaire par élimination, comment sais-tu si tu dois soustraire ou additionner les équations ?

2. Lorsque tu résous un système linéaire par élimination, comment sais-tu si tu dois d'abord effectuer une multiplication ?

Exercices

A

3. Résous chaque système linéaire par élimination.

a) $x - 4y = 1$
$x - 2y = -1$

b) $3a + b = 5$
$9a - b = 15$

c) $3x - 4y = 1$
$3x - 2y = -1$

d) $3x - 4y = 0$
$5x - 4y = 8$

4. Pour chaque système linéaire, écris un système équivalent dont :

I) les termes en x ont le même coefficient

II) les termes en y ont le même coefficient.

a) $x - 2y = -6$
$3x - y = 2$

b) $15x - 2y = 9$
$5x + 4y = 17$

c) $7x + 3y = 9$
$5x + 2y = 7$

d) $14x + 15y = 16$
$21x + 10y = -1$

5. Résous chaque système linéaire de la question 4.

B

6. Résous chaque système linéaire par élimination.

a) $2x + y = -5$
$3x + 5y = 3$

b) $3m - 6n = 0$
$9m + 3n = -7$

c) $2s + 3t = 6$
$5s + 10t = 20$

d) $3a + 2b = 5$
$2a + 3b = 0$

7. Résous chaque système linéaire. Explique ce que tu as fait en d).

a) $8x - 3y = 38$
$3x - 2y = -1$

b) $2a - 5b = 29$
$7a - 3b = 0$

c) $18a - 15b = 4$
$10a + 3b = 6$

d) $6x - 2y = 21$
$4x + 3y = 1$

Pour les questions 8 à 11, représente la situation à l'aide d'un système linéaire puis résous le problème.

8. En moyenne, 45 265 personnes ont assisté au Winnipeg Folk Festival en 2006 et en 2008. Il est venu 120 personnes de plus en 2008 qu'en 2006. Combien de personnes ont assisté au festival chaque année ?

9. Talise a plié 545 couvercles de métal pour fabriquer des clochettes pour sa robe et celle de sa sœur cadette. Elle a mis 185 clochettes de plus sur sa robe que sur celle de sa sœur. Combien de clochettes y a-t-il sur chaque robe ?

10. Il y a longtemps, les gens achetaient des biens et les payaient en peaux de castor plutôt qu'en argent. Deux commerçants de fourrures vont au magasin de la Compagnie de la Baie d'Hudson de Fort Langley, en Colombie-Britannique. Voici les articles achetés par chacun et leur coût total en peaux de castor :
10 couteaux + 20 couvertures = 200 peaux
15 couteaux + 25 couvertures = 270 peaux
Quel est le prix d'un couteau, en peaux de castor ? Quel est le prix d'une couverture ?

11. Bernard apprend une mélodie à la guitare. Il utilise un métronome électronique pour tenir le rythme. Bernard a joué à un tempo modéré pendant 4,5 min et à un tempo rapide pendant 30 s. Le métronome a fait 620 battements en tout. La vitesse du tempo modéré est de 40 battements/min inférieure à celle du tempo rapide. Quelle est la vitesse, en battements par minute, de chaque tempo ?

12. Résous chaque système linéaire. Explique ce que tu as fait en a).

a) $\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3} = 1$

$\dfrac{a}{4} - \dfrac{2b}{3} = -1$

b) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = 7$

$3x + 2y = 48$

c) $0{,}03x + 0{,}15y = 0{,}027$

$-0{,}5x - 0{,}5y = 0{,}05$

d) $-1{,}5x + 2{,}5y = 0{,}5$

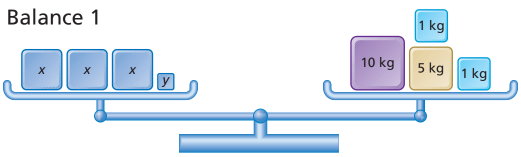
$2x + y = 1{,}5$

13. L'équipe de 2008-2009 des Oilers d'Edmonton comptait 25 joueurs, dont 17 mesuraient plus de 6 pi. Les sept neuvièmes des joueurs canadiens mesuraient plus de 6 pi. Les trois septièmes des joueurs étrangers mesuraient plus de 6 pi. Combien de joueurs canadiens et combien de joueurs étrangers y avait-il dans l'équipe ?

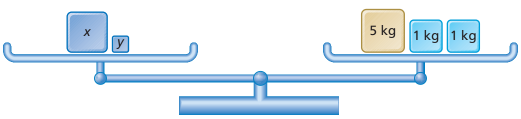
14. Mélodie a mené un sondage auprès des 76 élèves de 10e année de son école afin de savoir qui joue en ligne. Un quart des filles et $\dfrac{3}{4}$ des garçons ont joué en ligne pendant la fin de semaine. Trente-neuf élèves ont joué en ligne pendant la fin de semaine. Combien de filles et combien de garçons Mélodie a-t-elle interrogés ?

15. a) Quel système linéaire est représenté par ces deux balances à plateaux ?

Balance 1



Balance 2



b) Suppose que tu enlèves une masse x et une masse y du côté gauche de la balance 1, et une masse de 7 kg du côté droit. Comment sais-tu que la balance sera toujours en équilibre ?

c) Comment ce processus t'aide-t-il à déterminer les valeurs de x et de y ?

d) Quelle relation y a-t-il entre ce processus et la résolution d'un système linéaire par élimination ?

16. Pour visiter le Manitoba Children's Museum à Winnipeg :

- un adulte et 3 enfants paient 27,75 $;
- deux adultes et 2 enfants paient 27,50 $.

Quel billet d'entrée coûte plus cher ? Justifie ta réponse.

17. Une coopérative vend des aliments biologiques. Elle offre 25 kg d'une préparation à soupe composée de pois verts à 5 $/kg et de lentilles rouges à 6,50 $/kg. Cette préparation coûte 140 $. Quelle masse de pois verts et quelle masse de lentilles y a-t-il dans la préparation ?

18. Le système linéaire suivant représente un problème au sujet d'un pentagone.

$3x + 2y = 21$

$x - y = 2$

De quel problème peut-il s'agir ? Résous ton problème.

19. a) Écris un problème qui peut être représenté par le système linéaire suivant. Explique ce que tu as fait.

$3x + y = 17$

$x + y = 7$

b) Résous ton problème.

20. Tu additionnes les équations du système linéaire qui suit pour éliminer une variable.

a) Nomme deux façons d'éliminer une variable.

$3x + 4y = 29$

$2x - 5y = -19$

b) Résous le système à l'aide des deux méthodes que tu as décrites en a).

21. Ce tableau indique le nombre d'hommes et de femmes dans une étude sur le daltonisme.

	Femme	Homme	Total
Daltonisme	2	12	14
Pas de daltonisme	98	88	186
Total	100	100	200

a) À l'aide des données du tableau, imagine une situation qui peut être représentée par un système linéaire.

b) Écris un problème connexe et résous-le.

C

22. Charles achète des actions et des obligations. À la fin de l'année, la valeur de ses actions a diminué de 10,5 % et celle de ses obligations a augmenté de 3,5 %. Charles perd au total 84 $. S'il avait investi le montant des actions dans les obligations et le montant des obligations dans les actions, il aurait perdu seulement 14 $. Quels montants d'argent Charles a-t-il investis dans les actions et dans les obligations ?

23. Dans l'équation $2x + 5y = 8$, la différence entre les coefficients consécutifs, puis entre le dernier coefficient et le terme constant, est de 3.

a) Écris une autre équation dans laquelle la différence entre les coefficients consécutifs, puis entre le dernier coefficient et le terme constant, est de 3. Résous le système linéaire formé par les deux équations.

b) Écris et résous deux autres systèmes linéaires formés d'équations dans lesquelles la différence entre les coefficients consécutifs, puis entre le dernier coefficient et le terme constant, est de 3.

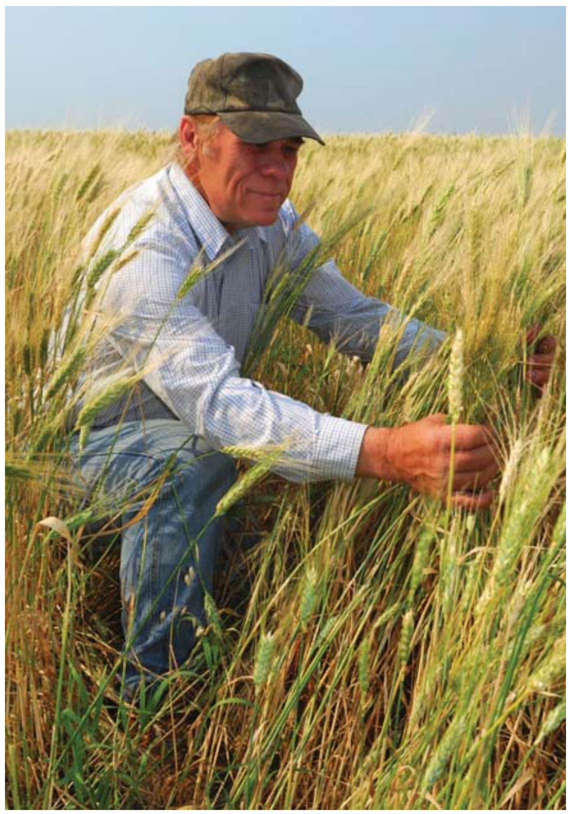
c) Compare les solutions obtenues en a) et en b).

d) À l'aide de l'algèbre, montre que la solution d'un système linéaire dont les équations présentent une telle différence constante entre les coefficients et le terme constant sera toujours la même.

24. Un fermier de la Saskatchewan a semé 1 section (640 acres) de blé et 2 sections d'orge. Il récolte au total 99 840 boisseaux. Le blé se vend 6,35 $ le boisseau et l'orge se vend 2,70 $ le boisseau. Le fermier reçoit 363 008 $ pour ses deux récoltes.

a) Quel est le rendement de chaque section, en boisseaux à l'acre ?

b) Certains fermiers utilisent l'hectare comme unité d'aire, au lieu de l'acre ou de la section. Une acre équivaut à 0,404 7 ha. Dois-tu écrire et résoudre un système linéaire différent pour déterminer le rendement total en boisseaux à l'hectare ? Justifie ta réponse.



Réfléchis

Tu as résolu un système linéaire par la méthode graphique, par substitution et par élimination. Pour chaque stratégie de résolution, donne un exemple d'un système linéaire qui s'y prête bien. Justifie tes choix.

PAUSE VÉRIFICATION 2

Liens

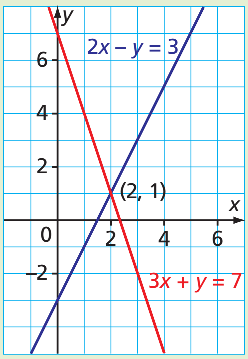
Un système linéaire

$3x + y = 7$

$2x - y = 3$

La méthode graphique

Utilise un logiciel graphique, une calculatrice à affichage graphique ou du papier quadrillé.



La méthode par substitution

$3x + y = 7$ ①

$2x - y = 3$ ②

Isole y dans l'équation ①.

$y = -3x + 7$

Remplace y par sa valeur dans l'équation ②.

$2x - (-3x + 7) = 3$

$5x - 7 = 3$

$5x = 10$

$x = 2$

Remplace x par sa valeur dans l'équation ①.

$3(2) + y = 7$

$6 + y = 7$

$y = 1$

Solution : $x = 2$ et $y = 1$

La méthode par élimination

$3x + y = 7$ ①

$2x - y = 3$ ②

Additionne les équations pour éliminer y.

$5x = 10$

$x = 2$

Remplace x par sa valeur dans l'équation ①.

$3(2) + y = 7$

$6 + y = 7$

$y = 1$

Solution : $x = 2$ et $y = 1$

Vérifie la solution. Remplace x et y par leur valeur dans chaque équation pour vérifier si les valeurs satisfont les équations.

$3x + y = 7$ ①

M. G. $= 3x + y$

$= 3(2) + 1$

$= 7$

$=$ M. D.

$2x - y = 3$ ②

M. G. $= 2x - y$

$= 2(2) - 1$

$= 3$

$=$ M. D.

Dans chaque équation, le membre de gauche est égal au membre de droite ; la solution est donc $x = 2$ et $y = 1$.

Présentation des concepts

- **Dans la leçon 7.4 :**
  – tu as résolu des systèmes linéaires par substitution ;
  – tu as créé des équations équivalentes en multipliant ou en divisant chaque terme d'une équation par un nombre autre que zéro.

- **Dans la leçon 7.5 :**
  – tu as résolu des systèmes linéaires par élimination ;
  – tu as créé un système linéaire équivalent en additionnant ou en soustrayant les deux équations d'un système linéaire.

Évalue ta compréhension

7.4

1. Résous chaque système linéaire par substitution.

a) $5x + y = 4$
$x + y = 2$

b) $3x - y = 1$
$2x + y = -1$

c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = -\frac{9}{4}$
$\frac{5x}{6} - \frac{3y}{4} = -\frac{17}{4}$

2. a) Représente cette situation à l'aide d'un système linéaire :
Un magasin vend des répliques d'inukshuks faits de 6 ou 7 pierres.
Le nombre total de pierres de tous les inukshuks vendus est de 494.
Le magasin a vendu 13 inukshuks de plus à 6 pierres qu'à 7 pierres.
b) Résous le problème suivant : Combien de répliques de chaque type le magasin a-t-il vendues ?

3. Zoé place 1 000 $ pour un an dans deux obligations d'épargne. Une obligation rapporte un intérêt annuel de 5,5 %, et l'autre, un intérêt annuel de 4,5 %. L'intérêt total obtenu est de 50 $. Quel montant Zoé a-t-elle placé dans chaque obligation ?

7.5

4. Résous chaque système linéaire par élimination.

a) $3x - y = -11$
$-x + y = -1$

b) $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = \frac{8}{3}$
$\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y = -\frac{17}{8}$

c) $0{,}5x - 0{,}3y = 0{,}15$
$-0{,}3x + 0{,}5y = -0{,}65$

d) $x + 2y = -2$
$-2x + y = 6$

5. Quand elle va à la cafétéria, Trisha achète un bol de soupe à 1,75 $ ou un plat principal à 4,75 $. En un an, elle a dépensé 490 $ et a acheté 160 aliments. Combien de bols de soupe et de plats principaux a-t-elle achetés ? Justifie tes réponses.

6. Deux solutions acides ont une différence de volume de 1 000 mL. La solution qui a le plus grand volume contient 5,5 % d'acide. L'autre contient 4,5 % d'acide. Le volume total d'acide des deux solutions est de 100 mL. Quel est le volume de chaque solution ?

7. Détermine les valeurs de x et de y dans le schéma suivant. Comment peux-tu vérifier tes réponses ?

7.6 Les propriétés des systèmes d'équations linéaires

OBJECTIF DE LA LEÇON

Déterminer le nombre de solutions de différents types de systèmes linéaires.

Établis des liens

Les grands-parents de Philippe le mettent au défi de déterminer leur âge :

La somme de nos âges est de 151.
Double la somme de nos âges et tu obtiens 302.
Quels sont nos âges ?

Philippe peut-il déterminer l'âge de ses grands-parents à l'aide de ces indices ? Si oui, pourquoi ? Si non, pourquoi ?

Développe ta compréhension

QU'EN PENSES-TU ?

Travaille avec deux camarades.
Utilise un outil technologique graphique, si possible.

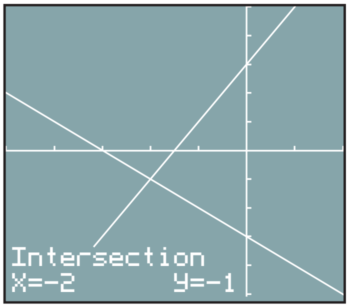
Chaque système linéaire suivant contient l'équation $-2x + y = 2$.
Résous graphiquement chaque système.

Système 1	**Système 2**	**Système 3**
$-2x + y = 2$	$-2x + y = 2$	$-2x + y = 2$
$2x + y = 2$	$-2x + y = 4$	$-4x + 2y = 4$

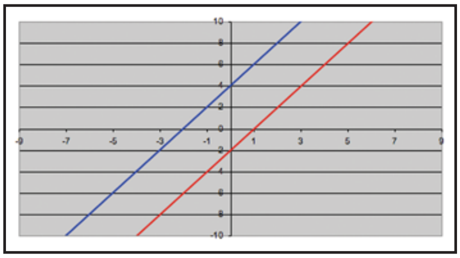
Fais part de tes résultats à tes camarades.
Combien de solutions chaque système linéaire a-t-il ?

Tous les systèmes linéaires que tu as étudiés dans les leçons précédentes admettaient une seule solution.
Tu peux représenter graphiquement un système linéaire afin de déterminer le nombre de solutions de ce système.

- Voici le graphique du système linéaire suivant :
  $x + y = -3$
  $-2x + y = 3$
  Les deux droites se coupent au point $(-2, -1)$. Il y a donc une seule solution : $x = -2$ et $y = -1$.
  Puisque les droites ont des pentes différentes, elles se coupent en un seul point.



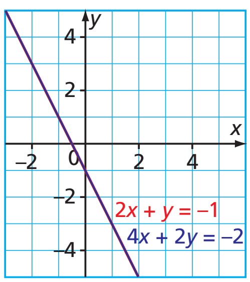
- Voici le graphique du système linéaire suivant :
  $-4x + 2y = 8$
  $-2x + y = -2$



Les droites ne se coupent pas.
Il n'y a donc pas de solution.
Puisque les droites ont la même pente, elles sont parallèles.

Comment sais-tu, grâce à leurs équations, que les droites sont parallèles ?

- Voici le graphique du système linéaire suivant :
  $2x + y = -1$
  $4x + 2y = -2$



Comment sais-tu, grâce à leurs équations, que les droites sont confondues ?

Puisque les deux droites coïncident, chaque point de l'une appartient aussi à l'autre. Ainsi, tous les points de cette droite sont des solutions du système.
On dit que le système admet un nombre **infini** de solutions.
Puisque les droites ont la même pente et la même ordonnée à l'origine, ce sont des **droites confondues.**

Infini signifie « sans limite » ou « sans fin ».

Des droites qui coïncident sont des **droites confondues.**

Exemple 1 Déterminer le nombre de solutions d'un système linéaire

Détermine le nombre de solutions de chaque système linéaire.

a) $x + y = -2$
$-2x - 2y = 4$

b) $4x + 6y = -10$
$-2x - y = -1$

c) $3x + y = -1$
$-6x - 2y = 12$

SOLUTION

Écris les équations sous la forme explicite pour déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine de chaque droite.

a) $x + y = -2$ ①
$-2x - 2y = 4$ ②

Pour l'équation ① :
$x + y = -2$
$y = -x - 2$ ③ Soustrais x de chaque membre.
La pente est de -1 et l'ordonnée à l'origine est -2.

Pour l'équation ② :
$-2x - 2y = 4$ Additionne $2x$ à chaque membre.
$-2y = 2x + 4$ Divise chaque membre par -2.
$$\frac{-2y}{-2} = \frac{2x}{-2} + \frac{4}{-2}$$
$y = -x - 2$ ④
L'équation ④ et l'équation ③ sont identiques ; alors, la pente est de -1 et l'ordonnée à l'origine est -2.
Les formes explicites des deux équations sont identiques ; donc, les droites sont confondues et le système linéaire admet un nombre infini de solutions.

b) $4x + 6y = -10$ ①
$-2x - y = -1$ ②

Pour l'équation ① :
$4x + 6y = -10$ Soustrais $4x$ de chaque membre.
$6y = -4x - 10$ Divise chaque membre par 6.
$$\frac{6y}{6} = \frac{-4x}{6} - \frac{10}{6}$$
$y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ ③
La pente est de $-\frac{2}{3}$ et l'ordonnée à l'origine est $-\frac{5}{3}$.

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

1. Détermine le nombre de solutions de chaque système linéaire.

a) $x + y = 3$
$-2x - y = -2$

b) $4x + 6y = -10$
$-2x - 3y = 5$

c) $2x - 4y = -1$
$3x - 6y = 2$

[Réponses : a) une solution ; b) un nombre infini de solutions ; c) aucune solution]

Pour l'équation ② :

$-2x - y = -1$ Additionne $2x$ à chaque membre.

$-y = 2x - 1$ Multiplie chaque membre par -1.

$y = -2x + 1$ ④

La pente est de -2 et l'ordonnée à l'origine est 1.

Puisque les pentes sont différentes, les droites se coupent en un seul point et le système linéaire admet une seule solution.

Pourquoi n'as-tu pas besoin de déterminer les ordonnées à l'origine pour montrer que le système admet une seule solution ? Quelle est la solution ?

c) $3x + y = -1$ ①

$-6x - 2y = 12$ ②

Pour l'équation ① :

$3x + y = -1$ Soustrais $3x$ de chaque membre.

$y = -3x - 1$ ③

La pente est de -3 et l'ordonnée à l'origine est -1.

Pour l'équation ② :

$-6x - 2y = 12$ Additionne $6x$ à chaque membre.

$-2y = 6x + 12$ Divise chaque membre par -2.

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{6x}{-2} + \frac{12}{-2}$$

$y = -3x - 6$ ④

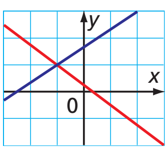
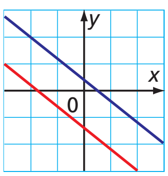
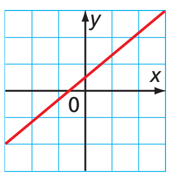
La pente est de -3 et l'ordonnée à l'origine est -6.

Puisque les pentes sont égales et que les ordonnées à l'origine sont différentes, les droites sont parallèles et le système linéaire n'admet aucune solution.

Pourquoi est-il important de déterminer les ordonnées à l'origine lorsque les équations d'un système linéaire ont la même pente ?

Dans le cas des systèmes linéaires de deux équations à deux variables, il y a seulement trois possibilités. Différentes méthodes te permettent de déterminer le nombre de solutions de ces systèmes.

Les solutions possibles d'un système linéaire

Droites sécantes	**Droites parallèles**	**Droites confondues**
Une solution	Aucune solution	Un nombre infini de solutions
		

Exemple 2 Établir un système linéaire qui admet un nombre donné de solutions

Soit l'équation $-2x + y = 4$. Écris une autre équation linéaire de manière à former un système linéaire :

a) qui admet une seule solution ;

b) qui n'admet aucune solution ;

c) qui admet un nombre infini de solutions.

SOLUTION

a) Dans un système linéaire qui admet une seule solution, les droites doivent avoir des pentes différentes afin de se couper.
Écris l'équation donnée sous la forme explicite pour déterminer la pente de sa droite.

$-2x + y = 4$ Additionne $2x$ à chaque membre.

$y = 2x + 4$

La pente de la droite est de 2.
Choisis une pente de 3 pour la deuxième droite et une ordonnée à l'origine quelconque, disons 2.
L'équation de la deuxième droite est
$y = 3x + 2$.
Voici un système linéaire qui admet une seule solution :

$y = 2x + 4$
$y = 3x + 2$

b) Dans un système linéaire qui n'admet aucune solution, les droites doivent être parallèles, mais non confondues, afin qu'il n'y ait pas de point d'intersection.
Les droites doivent avoir la même pente, mais des ordonnées à l'origine différentes.
Comme tu l'as vu en a), l'équation donnée est équivalente à $y = 2x + 4$ et la pente est de 2.
La pente de la deuxième droite doit aussi être de 2.
Soit 5, l'ordonnée à l'origine.
L'équation de la deuxième droite est
$y = 2x + 5$.
Voici un système linéaire qui n'admet aucune solution :

$y = 2x + 4$
$y = 2x + 5$

(Suite de la solution à la page suivante)

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. Soit l'équation $-6x + y = 3$. Écris une autre équation linéaire de manière à former un système linéaire :

a) qui admet une seule solution ;

b) qui n'admet aucune solution ;

c) qui admet un nombre infini de solutions.

[Réponses : a) $y = 2x + 4$; b) $y = 6x - 3$; c) $-12x + 2y = 6$]

c) Dans un système linéaire qui admet un nombre infini de solutions, les droites doivent être confondues afin de coïncider en tous points. Les équations doivent être équivalentes.
L'équation donnée est $-2x + y = 4$.
Pour déterminer une équation équivalente, multiplie chaque terme par un nombre autre que zéro, disons -3.

$$(-3)(-2x) + (-3)(y) = (-3)(4) \quad \text{Simplifie le tout.}$$
$$6x - 3y = -12$$

Voici un système linéaire qui admet un nombre infini de solutions :

$$6x - 3y = -12$$
$$-2x + y = 4$$

Quelles sont les ressemblances entre un système linéaire qui admet un nombre infini de solutions et un système linéaire qui n'admet aucune solution ? Quelles sont les différences ?

Place à la discussion

1. Quelles stratégies peux-tu utiliser pour déterminer le nombre de solutions d'un système linéaire sans le résoudre ? Inclus un exemple dans ton explication.

2. Pourquoi obtiens-tu l'équation d'une droite confondue lorsque tu multiplies ou que tu divises chaque terme de l'équation d'une fonction linéaire par un nombre autre que zéro ?

3. Comment peux-tu déterminer le nombre de solutions d'un système linéaire à partir de la pente des droites ? Comment peux-tu le faire à partir des ordonnées à l'origine ?

L'UNIVERS DES MATHS

Un peu d'histoire : Les systèmes linéaires et les Babyloniens

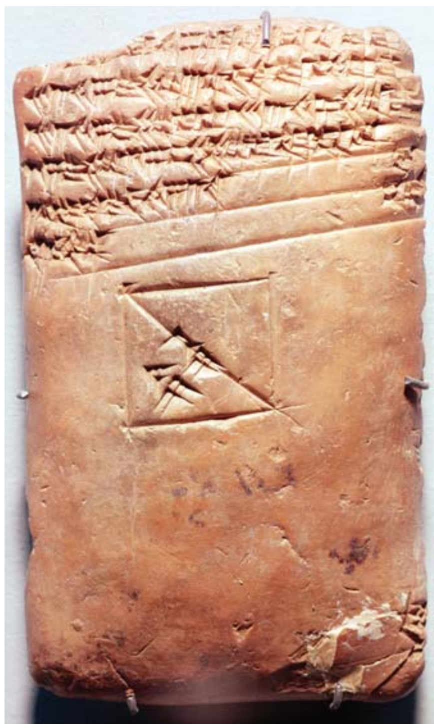
Babylone était une cité-État située là où se trouve l'Irak actuel. Les Babyloniens possédaient de grandes connaissances en mathématiques, notamment la capacité de résoudre des problèmes à l'aide de systèmes linéaires. Certains de ces problèmes ont été consignés sur des tablettes d'argile. Par exemple, une tablette qui date de 300 ans avant notre ère propose un problème semblable à celui-ci :

Deux champs ont une aire de 1 800 unités carrées en tout.

Un champ produit $\frac{2}{3}$ de boisseau par unité carrée.

L'autre produit $\frac{1}{2}$ boisseau par unité carrée. La récolte totale est de 1 100 boisseaux. Quelle est l'aire de chaque champ ?

Comment résoudrais-tu ce problème ?



Exercices

A

4. a) Sans le tracer, détermine la pente du graphique de chaque équation.

I) $-x + y = 5$

II) $-x - y = 10$

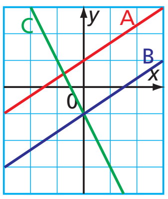
III) $-2x + 2y = 10$

IV) $x + y = 5$

b) Quelles droites en a) sont parallèles ?

c) Quelles droites en a) se coupent ?

5. Voici trois droites.



a) Nomme deux droites qui forment un système linéaire à une seule solution.

b) Nomme deux droites qui forment un système linéaire sans solution.

6. Utilise les 6 équations suivantes :

$4x + 2y = 20$ $x - 3y = 12$

$5x - 15y = -60$ $2x + y = 10$

$6x + 3y = 5$ $2x - 6y = 24$

Écris un système linéaire :

a) qui n'admet aucune solution ;

b) qui admet une seule solution ;

c) qui admet un nombre infini de solutions.

B

7. Détermine le nombre de solutions de chaque système linéaire.

a) $x + 2y = 6$
$x + y = -2$

b) $3x + 5y = 9$
$6x + 10y = 18$

c) $2x - 5y = 30$
$4x - 10y = 15$

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{2}$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{4}$

8. La première équation d'un système linéaire est donnée. Écris une deuxième équation telle que le système linéaire satisfait chaque condition. Explique ton raisonnement.

a) La deuxième droite coupe la droite de $-2x + y = 1$ dans le premier quadrant.

b) La deuxième droite ne coupe pas la droite de $-2x + y = 1$.

c) La deuxième droite et la droite de $-2x + y = 1$ sont confondues.

9. Le tableau qui suit indique quelques caractéristiques des graphiques de trois équations linéaires. Combien de solutions le système linéaire formé par chaque paire d'équations admet-il ? Explique ton raisonnement.

a) A et B

b) A et C

c) B et C

Équation	Pente	Ordonnée à l'origine
A	$-0,5$	4
B	$-0,5$	2
C	0,5	4

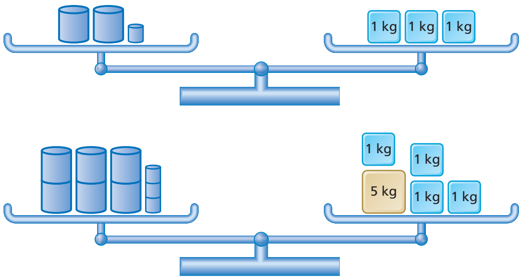
10. Marc a écrit les deux équations d'un système linéaire sous la forme explicite. Il remarque que les pentes sont de signes opposés. Combien de solutions ce système linéaire admet-il ? Justifie ta réponse.

11. Deux droites d'un système linéaire ont la même pente. De quelle information as-tu besoin pour déterminer si le système linéaire n'admet aucune solution ou s'il admet un nombre infini de solutions ?

12. Forme trois systèmes linéaires qui contiennent l'équation $3x - 4y = 12$. Écris la deuxième équation de façon que chaque système admette un nombre différent de solutions. Explique ce que tu as fait pour chaque système.

Pour les questions 13 à 17, indique si le système linéaire correspondant admet une seule solution, admet un nombre infini de solutions ou n'admet aucune solution. Justifie ta réponse. Tu n'as pas besoin de résoudre les problèmes.

13. Quelles sont la masse d'un grand contenant et celle d'un petit contenant ?



14. Nadine a une tasse remplie de pièces de 5 ¢ et une tasse remplie de pièces de 10 ¢. Elle a en tout 300 pièces d'une valeur totale de 23,25 $. Combien de pièces y a-t-il dans chaque tasse ?

15. Le solde combiné du compte chèques et du compte d'épargne de Prana est de 85 $. Ses parents doublent le solde de chaque compte et le nouveau solde combiné des deux comptes est de 170 $. Quel montant d'argent Prana a-t-il dans chacun de ses comptes ?

16. Une fin de semaine, 568 personnes ont participé à un pow-wow. Il y a eu 44 participants de plus le dimanche que le samedi. Combien de participants y a-t-il eu chaque jour ?

17. Le coût d'un billet pour une visite guidée de la maison Gabrielle-Roy, à Saint-Boniface, au Manitoba, est de 5 $ pour les adultes et de 3 $ pour les élèves. La vente de 75 billets a rapporté 275 $. Combien d'adultes et combien d'élèves ont visité la maison Gabrielle-Roy ?

18. À l'aide des termes « pente » et « ordonnée à l'origine », décris les conditions dans lesquelles deux droites ont un seul point d'intersection, ont un nombre infini de points d'intersection ou n'ont aucun point d'intersection.

19. **a)** Établis un système linéaire qui admet un nombre infini de solutions.

b) Explique ce qui se produit quand tu tentes de résoudre le système par élimination.

20. **a)** Établis un système linéaire qui n'admet aucune solution.

b) Explique ce qui se produit quand tu tentes de résoudre le système par élimination.

21. Le graphique d'un système linéaire permet-il toujours de déterminer le nombre de solutions du système ? Explique ton raisonnement à l'aide d'exemples.

C

22. **a)** Détermine le nombre de solutions de chaque système.

I) $2x + 3y = 4$
$4x + 6y = 8$

II) $2x + 3y = 4$
$4x + 6y = 7$

III) $2x + 3y = 4$
$4x + 5y = 8$

b) Comment peux-tu déterminer si un système admet une seule solution, admet un nombre infini de solutions ou n'admet aucune solution, en comparant les coefficients correspondants ?

23. Dans le système linéaire suivant, $AE - DB = 0$. Montre que le système admet un nombre infini de solutions ou n'en admet aucune.
$Ax + By = C$ et $Dx + Ey = F$

24. **a)** Pour quelle valeur de k le système linéaire suivant admet-il :

I) une solution ?

II) un nombre infini de solutions ?

$\frac{1}{2}x + \frac{5}{3}y = 2$ $\qquad$ $kx + \frac{5}{2}y = 3$

b) Explique pourquoi il n'y a pas de valeur de k pour laquelle le système linéaire n'admet aucune solution.

Réfléchis

À l'aide d'exemples, explique pourquoi les seules possibilités pour un système linéaire sont : aucune solution, une solution ou un nombre infini de solutions.

AIDE-MÉMOIRE

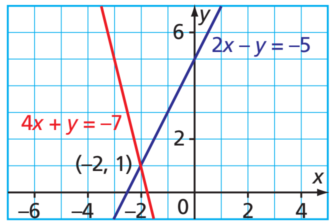
RÉSUMÉ DES CONCEPTS

Concepts clés	Applications
■ Résoudre un système de deux équations linéaires consiste à déterminer l'ensemble des paires ordonnées qui satisfont les deux équations.	Ce que cela signifie en pratique : ■ Remplacer (x, y) par leurs valeurs dans les deux équations d'un système linéaire permet de déterminer si la paire ordonnée est une solution. ■ On peut déterminer la solution d'un système linéaire à l'aide de graphiques ou de stratégies algébriques.
■ Si on multiplie ou divise les équations d'un système linéaire par un même nombre autre que zéro, qu'on les additionne ou qu'on les soustrait, on obtient un système équivalent.	■ Si on multiplie ou divise chaque terme d'une équation linéaire par une valeur constante, on obtient un système équivalent. La solution du nouveau système est la même que celle du système de départ. ■ Si on additionne ou soustrait les termes semblables des équations d'un système linéaire, on obtient un système équivalent. La solution du nouveau système est la même que celle du système de départ.
■ Un système de deux équations linéaires peut admettre une seule solution, admettre un nombre infini de solutions ou n'admettre aucune solution.	■ On peut déterminer le nombre de solutions à l'aide d'un graphique ou par la comparaison des pentes et des ordonnées à l'origine des droites des équations linéaires.

Retour sur le chapitre

- Comment détermines-tu le nombre de solutions d'un système linéaire ?
- Quelles stratégies peux-tu utiliser pour résoudre un système linéaire ?
- Pourquoi le fait de multiplier ou de diviser chaque terme de chaque équation, ou le fait d'additionner ou de soustraire les équations, ne modifie-t-il pas la solution du système linéaire ?

RÉSUMÉ DES HABILETÉS

Habiletés	Description	Exemple
Résoudre graphiquement un système linéaire. [7.2, 7.3]	Pour résoudre graphiquement un système linéaire : **1.** trace les droites après avoir déterminé leurs coordonnées à l'origine, ou leur pente et leur ordonnée à l'origine ; **2.** les coordonnées du point d'intersection sont la solution du système linéaire ; **3.** pour vérifier la solution, reporte les coordonnées du point d'intersection dans les équations.	Pour le système linéaire suivant : $2x - y = -5$ $4x + y = -7$  La solution est $x = -2$ et $y = 1$.
Résoudre algébriquement un système linéaire. [7.4, 7.5]	Pour résoudre algébriquement un système linéaire : **1.** utilise la méthode par substitution ou par élimination ; **2.** remplace x et y par leurs valeurs dans les deux équations pour vérifier si les coordonnées du point d'intersection satisfont les deux équations.	Pour le système linéaire suivant : $2x - y = -5$ ① $4x + y = -7$ ② Utilise la méthode par élimination. Additionne les équations. $6x = -12$ $x = -2$ Remplace x par sa valeur dans l'équation ①. $2(-2) - y = -5$ $y = 1$ La solution est $x = -2$ et $y = 1$.
Déterminer le nombre de solutions d'un système linéaire. [7.6]	Pour déterminer le nombre de solutions d'un système linéaire, fais l'étape 1 ou l'étape 2 : **1.** compare les graphiques des équations ; **2.** compare la pente et l'ordonnée à l'origine des équations.	Les droites du système linéaire ci-dessus ont des pentes différentes, donc il y a une seule solution. Les droites du système linéaire qui suit ont la même pente et la même ordonnée à l'origine, donc il y a un nombre infini de solutions : $2x + 4y = 6$ $4x + 8y = 12$ Les droites du système linéaire qui suit ont la même pente, mais des ordonnées à l'origine différentes, donc il n'y a aucune solution : $2x + 4y = 6$ $4x + 8y = 10$

RÉVISION

7.1

Pour les questions 1 et 2, représente la situation à l'aide d'un système linéaire, puis indique la solution exacte du problème connexe. Justifie tes choix.

1. **a)** Voici la situation :
En 2009, le Bedford Road Invitational Tournament (BRIT) a eu lieu pour la 41e fois, à Saskatoon, en Saskatchewan. Les équipes de l'extérieur ont remporté ce tournoi de basketball 17 fois de plus que les équipes de la Saskatchewan.

b) Voici les problèmes connexes : Combien de fois une équipe de la Saskatchewan a-t-elle remporté le BRIT ? Combien de fois une équipe de l'extérieur de la Saskatchewan a-t-elle remporté le BRIT ? (*Solution A :* Une équipe de la Saskatchewan a remporté le BRIT 29 fois et une équipe de l'extérieur l'a remporté 12 fois. *Solution B :* Une équipe de la Saskatchewan a remporté le BRIT 12 fois et une équipe de l'extérieur l'a remporté 29 fois.)

2. **a)** Voici la situation :
Yvette a une entreprise de déneigement. Elle facture 15 $ pour une petite allée et 25 $ pour une grande allée. En une fin de semaine, Yvette a déneigé 25 allées et a gagné 475 $.

b) Voici les problèmes connexes :
Combien de petites allées Yvette a-t-elle déneigées ? Combien de grandes allées Yvette a-t-elle déneigées ? (*Solution A :* Yvette a déneigé 10 petites allées et 15 grandes allées. *Solution B :* Yvette a déneigé 15 petites allées et 10 grandes allées.)

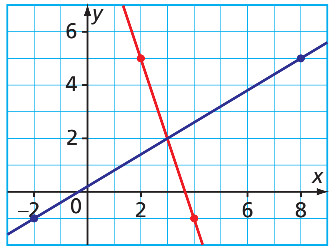
3. Karl a représenté à l'aide du système linéaire suivant un problème qu'il a inventé au sujet du coût de billets de cinéma et de maïs soufflé pour un groupe de personnes. De quel problème peut-il s'agir ?

$9,95b + 5,50m = 76,20$

$b - m = 3$

7.2

4. **a)** Quel système linéaire est représenté par le graphique suivant ? Explique comment tu le sais.



b) Quelle est la solution du système linéaire ? La solution est-elle exacte ou approximative ? Comment le sais-tu ?

5. Pour résoudre graphiquement le système linéaire suivant, George et Sunita ont procédé différemment.

$-x + 4y = 10$ ①

$4x - y = -10$ ②

Voici la méthode de George :
Équation ① : tracer les points (0 ; 2,5) et (−10 ; 0)
Équation ② : tracer les points (0 ; 10) et (−2,5 ; 0)

Voici la méthode de Sunita :
Équation ① : tracer le graphique de $y = \frac{1}{4}x + 2,5$
Équation ② : tracer le graphique de $y = 4x + 10$

a) Explique ce que chaque élève fera probablement ensuite.

b) Choisis l'une des deux méthodes. Résous graphiquement le système linéaire.

6. Explique comment tu résoudrais graphiquement le système linéaire suivant à l'aide de papier quadrillé. Tu n'as pas besoin de tracer les graphiques.

$x - y = 15$

$2x + y = 6$

7. **a)** Résous graphiquement le système linéaire suivant :

$4x - 2y = 1$

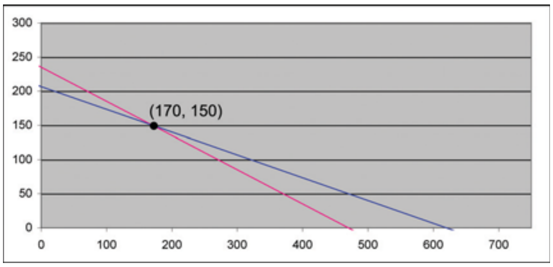
$3x - 4y = 16$

b) Indique si la solution est exacte ou approximative et explique comment tu le sais.

7.3

8. **a)** Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire :
Le sel de table contient 40 % de sodium et les experts de la santé recommandent aux gens de limiter leur apport en sodium. Au petit déjeuner, Éric a mangé 2 bols de céréales et 4 tranches de bacon, soit 940 mg de sodium en tout. Nathalie a mangé 1 bol de céréales et 3 tranches de bacon, soit 620 mg de sodium en tout.

b) Le graphique suivant représente un système linéaire qui correspond à la situation en a). Que représente chaque droite ?



c) Résous le problème connexe suivant :
Quelle quantité de sodium y a-t-il dans un bol de céréales et dans une tranche de bacon ? La solution est-elle exacte ou approximative ? Comment peux-tu le savoir ?

9. Résous graphiquement chaque système linéaire à l'aide de la technologie.

a) $2x + 3y = 13$
$5x - 2y = 1$

b) $y = \frac{1}{6}x - 2$
$y = -\frac{1}{6}x + 2$

c) $4x - 5y = 20$
$8x + 5y = 19$

d) $\frac{x}{2} + \frac{3y}{4} = -\frac{25}{16}$
$-2x + 4y = 20$

7.4

10. Résous chaque système linéaire par substitution.

a) $x + y = -5$
$x + 3y = -15$

b) $7x + y = 10$
$3x - 2y = -3$

c) $\frac{1}{2}x + 3y = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}x - 5y = \frac{16}{9}$

d) $0{,}6x - 0{,}2y = -0{,}2$
$-0{,}03x - 0{,}07y = 0{,}17$

11. **a)** Pourquoi Laura a-t-elle multiplié l'équation ① par 4 et l'équation ② par 6 avant de résoudre le système linéaire suivant ?

$-\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y = -\frac{1}{2}$ ①

$\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = \frac{19}{3}$ ②

b) Pourquoi le nouveau système linéaire a-t-il la même solution que le système de départ ?

c) Résous le système linéaire.

12. **a)** Représente cette situation par un système linéaire : Paul a fait un pain bannock. Il a mesuré $5\frac{3}{4}$ tasses de farine à l'aide d'une mesure de $\frac{1}{4}$ de tasse et d'une mesure de $\frac{2}{3}$ de tasse. Paul a utilisé la mesure d'un quart de tasse une fois de plus que l'autre.

b) Combien de mesures de chaque type Paul a-t-il utilisées ?

13. Le périmètre de 30 tables rectangulaires identiques placées bout à bout mesure 306 pi. Le périmètre de ces mêmes tables placées côte à côte mesure 190 pi.

a) Dessine 3 tables de chaque agencement.

b) Représente la situation par un système linéaire.

c) Résous le système linéaire, pour obtenir la largeur et la longueur de chaque table.

14. Sophie a esquissé le motif d'une couverture. Son motif contient 150 carrés et triangles équilatéraux. Quatre-vingt-trois figures sont bleues. Quarante pour cent des triangles et 60 % des carrés sont bleus. Combien de triangles et combien de carrés y a-t-il dans le motif ?

7.5

15. Résous chaque système linéaire par élimination.

a) $-3x - y = 5$
$2x + y = -5$

b) $2x - 4y = 13$
$4x - 5y = 8$

16. **a)** Dans ce système linéaire, par quel nombre dois-tu multiplier l'une des équations pour faciliter l'élimination de y à l'étape suivante ? Justifie ta réponse.

$3x - 4y = 8{,}5$ ①
$4x + 2y = 9{,}5$ ②

b) Quelle sera la prochaine étape de résolution ?

c) Résous ce système linéaire.

17. La bouteille d'un terrain de basketball a la forme d'un rectangle et d'un demi-cercle combinés. Son périmètre est d'environ $68\frac{5}{6}$ pi. La longueur de la partie rectangulaire de la bouteille mesure 7 pi de plus que sa largeur.

a) Représente cette situation à l'aide d'un système linéaire.

b) Résous le problème connexe suivant : Quelles sont la longueur et la largeur de la partie rectangulaire de la bouteille, au pied près ?

7.6

18. **a)** Écris deux systèmes linéaires : un qui admet un nombre infini de solutions et un qui n'admet aucune solution.

b) Comment peux-tu montrer le nombre de solutions de chaque système linéaire à l'aide d'un graphique ?

c) Comment le fait de comparer les équations sous la forme explicite peut-il t'aider à déterminer le nombre de solutions ?

19. Ghislaine et Olivia portent un numéro à 2 chiffres au hockey. Elles ont écrit des indices pour aider à deviner les nombres.
Indice 1 : La différence des deux nombres est de 33. Si tu triples chaque nombre, puis que tu soustrais les produits, tu obtiens 99.
Indice 2 : La somme des deux nombres est de 57. Si tu divises chaque nombre par 3, puis que tu additionnes les quotients, tu obtiens 20.
Indice 3 : La somme des deux nombres est de 57. Leur différence est de 33.

a) Quels indices ne donnent pas suffisamment d'information pour déterminer les deux nombres ? Justifie ta réponse.

b) Détermine les nombres à partir des indices qui donnent suffisamment d'information. Vérifie ta solution.

20. Détermine le nombre de solutions de chaque système linéaire. Décris les stratégies utilisées.

a) $-x + 5y = 8$
$2x - 10y = 7$

b) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y = -\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}x - \frac{y}{8} = \frac{1}{8}$

c) $0{,}5x + y = 0{,}3$
$-x + 2y = 0{,}6$

d) $2x - y = -5$
$6x - 3y = 15$

21. **a)** Explique comment la pente des droites d'un système linéaire aide à déterminer s'il y a seulement une solution. Inclus un exemple.

b) La pente des droites fournit-elle assez d'information pour distinguer un système sans solution d'un système qui admet un nombre infini de solutions ? Inclus un exemple.